目　　录

第二章　单变量函数的微分学

§1. 显函数的导函数

1° 导函数的定义　若 x 及 $x_1 = x + \Delta x$ 为自变量的值，则差

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

称为函数 $y = f(x)$ 的增量．

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

有意义，则称为导函数，而函数 $f(x)$ 本身在此情形下称为可微分的函数．

函数 $f'(x)$ 在几何上是函数 $y = f(x)$ 的图形在 x 点切线的斜率［$\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$］(图 2.1)．

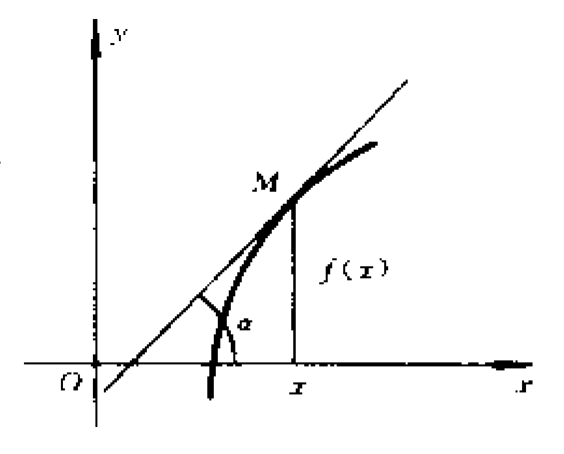


图 2.1

2° 求导函数的基本法则　若 c 为常数且函数 $u = u(x)$，$v = v(x)$，$w = w(x)$ 都有导函数，则

(1) $c' = 0$；(2) $(cu)' = cu'$；

(3) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$；

(4) $(uv)' = u'v + v'u$；

(5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ $(v \neq 0)$；

(6) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ (n 为常数)；

(7) 若函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 都有导函数，则

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

3° 基本公式　若 x 为自变数*)，则

Ⅰ. $(x^n)' = nx^{n-1}$（n 为常数）；

Ⅱ. $(\sin x)' = \cos x$；　　Ⅲ. $(\cos x)' = -\sin x$；

Ⅳ. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$；　　Ⅴ. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$；

Ⅵ. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

Ⅶ. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

Ⅷ. $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$；

Ⅸ. $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$；

Ⅹ. $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0)$；$(e^x)' = e^x$；

Ⅺ. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}(a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$；

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$；

Ⅻ. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$；　　ⅩⅢ. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$；

ⅩⅣ. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$；　　ⅩⅤ. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

4° 单侧的导函数　表示式

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

及

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

分别称为函数 $f(x)$ 在 x 点的左导函数或右导函数.

导函数 $f'(x)$ 存在的充分且必要的条件是

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

---

*) 在本章基本公式及习题解答的叙述过程中，一些明显的定义域要求，例如本节公式Ⅴ中要求 $x \neq k\pi$（k 整数），Ⅵ中要求 $|x| < 1$ 等等，以及例如尔后 §5 中相应的限制，一般地就不再一一声明.

5° 无穷的导函数　若在某一点 x 有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\infty,$$

则称函数 $f(x)$ 在 x 点有无穷的导函数. 在此种情形下，函数 $y=f(x)$ 的图形上在 x 点的切线与 Ox 轴垂直.

821. 若 x 由 1 变到 1000，求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y=\lg x$ 的对应的增量 Δy.

解　$\Delta x=1000-1=999$;

$$\Delta y=\lg 1000-\lg 1=3.$$

822. 若 x 由 0.01 变到 0.001，求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 的对应的增量 Δy.

解　$\Delta x=0.001-0.01=-0.009$;

$$\Delta y=\frac{1}{(0.001)^2}-\frac{1}{(0.01)^2}=990000.$$

823. 设：

(а) $y=ax+b$; (б) $y=ax^2+bx+c$; (в) $y=a^x$.

若变量 x 得到增量 Δx，求增量 Δy.

解　(а) $\Delta y=[(ax+a\Delta x)+b]-[ax+b]=a\Delta x$;

(б) $\Delta y=[a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c]$

$$-[ax^2+bx+c]$$

$$=(2ax+b)\Delta x+a(\Delta x)^2;$$

(в) $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$.

824. 证明：

(a)$\Delta[f(x)+g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x)$;

(б)$\Delta[f(x)g(x)]$

$=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

证　(a)$\Delta[f(x)+g(x)]$

$=[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]$

$=[f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)]$

$=\Delta f(x)+\Delta g(x)$，

于是，

$$\Delta[f(x)+g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x);$$

(б)$\Delta[f(x)g(x)]$

$=[f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)]-[f(x)g(x)]$

$=[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x+\Delta x)$

$\quad+[g(x+\Delta x)-g(x)]f(x)$

$=\Delta f(x)g(x+\Delta x)+\Delta g(x)f(x)$，

于是，

$\Delta[f(x)g(x)]$

$=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

同样，我们还可将(σ)的结果写成

$$\Delta[f(x)g(x)]=f(x+\Delta x)\Delta g(x)+g(x)\Delta f(x).$$

825. 过曲线 $y=x^2$ 上的二点 $A(2,4)$ 和 $A'(2+\Delta x,4+\Delta y)$ 引割线 AA'，求此割线的斜率，设：

(а)$\Delta x = 1$；　(б)$\Delta x = 0.1$；　(в)$\Delta x = 0.01$；

(г)Δx 为任意小.

在已知曲线上 A 点的切线的斜率等于甚么？

解　割线 AA' 的斜率 $k_{AA'} = \dfrac{(2+\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = 4 + \Delta x$，

(а)$k_{AA'} = 5$；　　　(б)$k_{AA'} = 4.1$；

(в)$k_{AA'} = 4.01$；　　(г)$k_{AA'} = 4 + \Delta x$.

于是，在 A 点的切线斜率为

$$k_A = \lim_{A' \to A} k_{AA'} = \lim_{\Delta x \to 0}(4 + \Delta x) = 4.$$

826. 把 Ox 轴上的线段 $1 \leqslant x \leqslant 1 + h$ 利用函数关系 $y = x^3$ 映变到 Oy 轴上．求其平均的伸长系数．设：(а)$h = 0.1$；(б)$h = 0.01$；(в)$h = 0.001$，计算此系数的值．

当 $x = 1$ 时伸长的系数等于甚么？

解　平均伸长系数 $\bar{l} = \dfrac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = 3 + 3h + h^2$，

(а)$\bar{l} = 3 + 3(0.1) + (0.1)^2 = 3.31$；

(б)$\bar{l} = 3 + 3(0.01) + (0.01)^2 = 3.0301$；

(в)$\bar{l} = 3 + 3(0.001) + (0.001)^2 = 3.003001$.

于是，

$$l|_{x=1} = \lim_{h \to 0} \bar{l} = 3.$$

827. 动点沿 Ox 轴运动的规律由下式表出

$$x = 10t + 5t^2$$

式中 t 以秒计的时间，x 为以米计的距离. 求在 $20 \leqslant t \leqslant 20 + \Delta t$ 时间内运动的平均速度. 设：(a)$\Delta t = 1$；(б)$\Delta t = 0.1$；(в)$\Delta t = 0.01$，计算此速度的值. 当 $t = 20$ 时运动的速度等于甚么？

解 平均速度 $\bar{v} = \{[10(20 + \Delta t) + 5(20 + \Delta t)^2] - [10 \times 20 + 5 \times 20^2]\} \div \Delta t$

$= 210 + 5\Delta t$(米 / 秒)，

(a)$\bar{v} = 210 + 5 \times 1 = 215$(米 / 秒)；

(б)$\bar{v} = 210.5$(米 / 秒)；

(в)$\bar{v} = 210.05$(米 / 秒).

于是，

$$v|_{t=20} = \lim_{\Delta t \to 0}(210 + 5\Delta t) = 210(\text{米 / 秒}).$$

828. 根据导函数的定义，直接求下列函数的导函数：

(a)x^2；(б)x^3；(в) $\frac{1}{x}$；(г) $\sqrt{x}$；(д) $\sqrt[3]{x}$；

(е)$\operatorname{tg} x$；(ж)$\operatorname{ctg} x$；(з)$\arcsin x$；(и)$\arccos x$；

(к)$\operatorname{arc\,tg} x$.

解 (a)$y = x^2$，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

(б) $y = x^3$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$= 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2.$$

(в) $y = \frac{1}{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = -\frac{1}{x(\Delta x + x)}.$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{1}{x(\Delta x + x)}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}.$$

(г) $y = \sqrt{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (x > 0).$$

(д) $y = \sqrt[3]{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}.$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x \neq 0).$$

(e) $y = \operatorname{tg} x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\Delta x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\Delta x} - \operatorname{tg} x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\Delta x(1+\operatorname{tg}^2 x)}{\Delta x(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\Delta x)}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\Delta x \sec^2 x}{\Delta x(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\Delta x)}.$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{tg}\Delta x \sec^2 x}{\Delta x(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\Delta x)}$$

$$\cdot\frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin t}{t}$$

$$\cdot\frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},$$

式中 $t=(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$，

从而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}t=0$.

于是，

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}$$

$$\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

其中 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=1$；

(II) $y=\arccos x$，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\arccos(x+\Delta x)-\arccos x}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin[(x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}-(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}]}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin t}{t}$$

$$\cdot\frac{-(2x+2\Delta x)}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},$$

式中 $t=(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$，

从而$\lim\limits_{\Delta x\to 0} t = 0$.

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(2x+\Delta x)}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}$$

$$\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\arc\sin t}{t}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(к) $y = \text{arc tg}x$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{arc tg}(x+\Delta x)-\text{arc tg}x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\text{arc tg}\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\text{arc tg}\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}$$

$$\cdot\frac{1}{1+x(x+\Delta x)}.$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\text{arc tg}\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}\right.$$

$$\cdot\frac{1}{1+x(x+\Delta x)}\Big] = \frac{1}{1+x^2},$$

其中利用 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\text{arc tg}t}{t} = \lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\text{tg}u} = 1$.

829. 设：

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3,$$

求 $f'(1)$，$f'(2)$ 和 $f'(3)$.

解
$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-2)^2(x-3)^3 \\ &\quad + 2(x-1)(x-2)(x-3)^3 \\ &\quad + 3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2 \\ &= 2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9). \end{aligned}$$

于是，

$$f'(1) = -8;\ f'(2) = f'(3) = 0.$$

830. 设：

$$f(x) = x^2\sin(x-2),$$

求 $f'(2)$.

解 $f'(x) = 2x\sin(x-2) + x^2\cos(x-2)$.

于是，

$$f'(2) = 4.$$

831. 设：

$$f(x) = x + (x-1)\text{arc sin}\sqrt{\frac{x}{x+1}},$$

求 $f'(1)$.

解 方法一：

若用复合函数求导法，可得

$$f'(x)=1+\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x}}.$$

于是，

$$f'(1)=1+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\frac{\pi}{4}.$$

方法二：

若按定义作，注意到当 $x=1$ 时，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}},$$

即得

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}\right)$$

$$=1+\frac{\pi}{4}.$$

832. 设函数 $f(x)$ 在 a 点可微分，求

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

解 设 $\Delta x=x-a$，则当 $x\to a$ 时，$\Delta x\to 0$. 于是，

得 $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{\Delta x\to a}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a).$$

833. 证明：若函数 $f(x)$ 可微分及 n 为自然数，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x). \qquad (1)$$

反之，若对于函数 $f(x)$ 有极限(1) 存在，则可否断定这个函数有导函数?研究迪里黑里函数的例子(参阅第一章第 734 题).

证 $\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}=f'(x).$$

反之，就不一定对了. 例如，对于迪里黑里函数

$$\chi(x)=\begin{cases}1,\text{若 } x \text{ 为有理数},\\ 0,\text{若 } x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

在任一有理点是不连续的，当然其导数也不存在. 但由于 $x+\frac{1}{n}$ 仍为有理数，故当 x 为有理数时，

$$\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)=1-1=0,$$

从而，极限(1)

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)\right]=0$$

存在.

利用导函数表，求下列函数的导函数:

834. $y=2+x-x^2$. 问 $y'(0)$; $y'\left(\frac{1}{2}\right)$; $y'(1)$; $y'(-10)$ 等于甚么?

解 由于 $y'(x)=1-2x$，故得

$y'(0)=1; y'\left(\frac{1}{2}\right)=0; y'(1)=-1;$

$y'(-10)=21.$

835. $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$. 当 x 为何值时：

(a) $y'(x)=0$；(б) $y'(x)=-2$；(в) $y'(x)=10$？

解 $y'(x)=x^2+x-2$.

(a) 令 $y'(x)=0$，得 $x^2+x-2=0$. 于是，$x=-2$ 或 $x=1$；

(б) 令 $y'(x)=-2$，得 $x^2+x=0$. 于是，$x=-1$ 或 $x=0$；

(в) 令 $y'(x)=10$；得 $x^2+x-12=0$. 于是，$x=-4$ 或 $x=3$.

836. $y=a^5+5a^3x^2-x^5$.

解 $y'=10a^3x-5x^4$.

837. $y=\frac{ax+b}{a+b}$.

解 $y'=\frac{a}{a+b}$.

838. $y=(x-a)(x-b)$.

解 $y'=x-a+x-b=2x-a-b$.

839. $y=(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

解 $y'=(x+2)^2(x+3)^3+2(x+1)(x+2)(x+3)^3$

$+3(x+1)(x+2)^2(x+3)^2$

$$= (x+2)(x+3)^2[(x+2)(x+3)$$
$$+ 2(x+1)(x+3) + 3(x+1)(x+2)]$$
$$= 2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9).$$

840. $y = (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha).$

解 $y' = \sin\alpha(x\cos\alpha - \sin\alpha)$
$$+ \cos\alpha(x\sin\alpha + \cos\alpha)$$
$$= x\sin 2\alpha + \cos 2\alpha.$$

841. $y = (1+nx^m)(1+mx^n).$

解 $y' = mnx^{m-1}(1+mx^n) + mnx^{n-1}(1+nx^m)$
$$= mn[x^{m-1} + x^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1}].$$

842. $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3.$

解 $y' = -(1-x^2)^2(1-x^3)^3$
$$-4x(1-x)(1-x^2)(1-x^3)^3$$
$$-9x^2(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2$$
$$= -(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1+6x$$
$$+15x^2+14x^3)$$
$$= -(1-x)^5(1+x)(1+2x)(1+4x$$
$$+7x^2)(1+x+x^2)^2.$$

843. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}.$

解 $y' = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4}\right)(x \neq 0).$

844. 证明公式

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

证 $$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}$$

$$= \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

这里已暗设 $cx+d \neq 0$.

求下列函数之导函数：

845. $y = \frac{2x}{1-x^2}$.

解 $$y' = \frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}(|x| \neq 1).$$

846. $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

解 由于 $y = \frac{2}{1-x+x^2} - 1$，故

$$y' = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}.$$

847. $y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$.

解 $y' =$

$$\frac{(1-x)^2(1+x)^3-x[3(1+x)^2(1-x)^2-2(1-x)(1+x)^3]}{(1-x)^4(1-x)^6}$$

$$= \frac{1 - x + 4x^2}{(1 - x)^3(1 + x)^4}, (|x| \neq 1).$$

848. $y = \frac{(2 - x^2)(3 - x^3)}{(1 - x)^2}$.

解 $y' =$

$$\frac{(1-x)^2[-2x(3-x^3)-3x^2(2-x^2)]+2(1-x)(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3} (x \neq 1).$$

849. $y = \frac{(1 - x)^p}{(1 + x)^q}$.

解 $y' = \frac{-p(1-x)^{p-1}(1+x)^q-q(1+x)^{q-1}(1-x)^p}{(1+x)^{2q}}$

$$= -\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}$$

$(x \neq -1)$.

850. $y = \frac{x^p(1 - x)^q}{1 + x}$.

解

$$y' = \frac{[px^{p-1}(1-x)^q-qx^p(1-x)^{q-1}](1+x)-x^p(1-x)^q}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2}[p-(q+1)x-(p+q-1)x^2]$$

$(x \neq -1)$.

851. $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$.

解 $y' = 1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x > 0)$.

852. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

解 $y'=\frac{\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}$

$=\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}(|x|<|a|)$.

858. $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$.

解 $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2}}$

$\cdot\frac{3x^2(1-x^3)+3x^2(1+x^3)}{(1-x^3)^2}$

$=\frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}(|x|\neq 1)$.

859. $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$.

解 $y'=-\frac{1}{(1+x^2)(x+\sqrt{1+x^2})^2}$

$\left(\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}+2x\right)$

$=-\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

860. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

解 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

$$\cdot\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$

$$=\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

$(x>0)$.

861. $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$.

解 $$y=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^2}}$$

$$\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$=\frac{1}{27\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt[3]{x})^2}\cdot\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^2}}$$

$(x\neq 0, x\neq -1, x\neq -8)$.

862. $y=\cos 2x-2\sin x$.

解 $$y'=-2\sin 2x-2\cos x$$

$$=-2\cos x(1+2\sin x).$$

863. $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$.

解 $$y'=-2x\cos x-(2-x^2)\sin x+2\sin x$$

$$+2x\cos x$$

$$=x^2\sin x.$$

864. $y=\sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$.

解　$y' = -2\sin x\cos x\cos(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$

$-2\sin x\cos x\sin(\cos^2 x)\sin(\sin^2 x)$

$= -\sin 2x[\cos(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$

$+\sin(\cos^2 x)\sin(\sin^2 x)]$

$= -\sin 2x\cos(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= -\sin 2x\cos(\cos 2x).$

865. $y = \sin^n x\cos nx.$

解　$y' = n\sin^{n-1}x\cos x\cos nx - n\sin^n x\sin nx$

$= n\sin^{n-1}x(\cos x\cos nx - \sin x\sin nx)$

$= n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x.$

866. $y = \sin[\sin(\sin x)].$

解　$y' = \cos x\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos[\sin(\sin x)].$

867. $y = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}.$

解　$y' = \dfrac{2\sin x(\cos x\sin x^2 - x\sin x\cos x^2)}{\sin^2 x^2}$

$(x^2 \neq k\pi; k = 1,2,\cdots).$

868. $y = \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}.$

解　$y' = \dfrac{-2\sin^3 x - 4\sin x\cos^2 x}{4\sin^4 x}$

$= -\dfrac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}(x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$

869. $y = \dfrac{1}{\cos^n x}.$

解　$y' = -\frac{1}{\cos^{2n}x}(-n\cos^{n-1}x\sin x)$

$= \frac{n\sin x}{\cos^{n+1}x}$ ($x \neq \frac{2k-1}{2}\pi$; k 为整数).

870. $y = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$.

解　$y' = \frac{1}{(\cos x + x\sin x)^2}[(x\sin x - \cos x + \cos x)(\cos x + x\sin x) - (\sin x - \sin x + x\cos x)(\sin x - x\cos x)]$

$= \frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$.

871. $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

解　$y' = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\csc^2\frac{x}{2}$

$= \frac{2}{\sin^2 x}$ ($x \neq k\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$).

872. $y = \operatorname{tg}x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$.

解　$y' = \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x\sec^2 x + \operatorname{tg}^4 x\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^6 x$

($x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$).

873. $y = 4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x}$.

解　$y' = \frac{8}{3}(\operatorname{ctg}x)^{-\frac{1}{3}}(-\csc^2 x) + \frac{8}{3}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{5}{3}}(-\csc^2 x)$

$= -\frac{8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\operatorname{ctg}x}}$

$(x \neq k\pi; x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

874. $y = \sec^2\frac{x}{a} + \csc^2\frac{x}{a}$.

解 $$y' = \frac{2}{a}\sec^2\frac{x}{a}\operatorname{tg}\frac{x}{a} - \frac{2}{a}\csc^2\frac{x}{a}\operatorname{ctg}\frac{x}{a}$$

$$= \frac{2}{a}\left(\frac{\sin\frac{x}{a}}{\cos^3\frac{x}{a}} - \frac{\cos\frac{x}{a}}{\sin^3\frac{x}{a}}\right)$$

$$= \frac{2}{a}\cdot\frac{\sin^4\frac{x}{a} - \cos^4\frac{x}{a}}{\sin^3\frac{x}{a}\cos^3\frac{x}{a}}$$

$$= \frac{16\left(\sin^2\frac{x}{a} - \cos^2\frac{x}{a}\right)}{a\left(2\sin\frac{x}{a}\cos\frac{x}{a}\right)^3} = \frac{-16\cos\frac{2x}{a}}{a\sin^3\frac{2x}{a}}$$

$(x \neq \frac{k\pi a}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

875. $y = \sin[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$.

解 $$y' = \cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]\cdot\{-2\cos(\operatorname{tg}^3 x)\sin(\operatorname{tg}^3 x)\}\cdot[3\operatorname{tg}^2 x\sec^2 x]$$

$$= -3\operatorname{tg}^2 x\sec^2 x\cdot\sin(2\operatorname{tg}^3 x)\cdot\cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$$

$(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

876. $y = e^{-x^2}$.

解 $y' = -2xe^{-x^2}$.

877. $y = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$.

解 $y' = -\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}\cdot 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}\ln 2 \quad (x \neq 0)$.

878. $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$.

解 $y' = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) = x^2e^x$.

879. $y = \left[\frac{1 - x^2}{2}\sin x - \frac{(1 + x)^2}{2}\cos x\right]e^{-x}$.

解 $$y' = -e^{-x}\left[\frac{1 - x^2}{2}\sin x - \frac{(1 + x)^2}{2}\cos x\right]$$
$$+ e^{-x}\left[\frac{1 - x^2}{2}\cos x - x\sin x\right.$$
$$\left. + \frac{(1 + x)^2}{2}\sin x - (1 + x)\cos x\right]$$
$$= x^2e^{-x}\sin x.$$

880. $y = e^x\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)$.

解 $$y' = e^x\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}e^x\csc^2\frac{x}{2}$$
$$= \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}} (x \neq 2k\pi; k \text{ 为整数}).$$

881. $y = \frac{\ln 3\cdot\sin x + \cos x}{3^x}$.

解
$$y' = \frac{3^x(\ln 3\cdot\cos x - \sin x) - 3^x\ln 3(\ln 3\cdot\sin x + \cos x)}{3^{2x}}$$
$$= -\frac{(1 + \ln^2 3)\sin x}{3^x}.$$

882. $y = e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{ax}[a(a\sin bx - b\cos bx)$

$+ (ab\cos bx + b^2\sin bx)]$

$= \sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx$.

883. $y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$.

解 $y' = e^x[1 + e^{e^x}(1 + e^{e^{e^x}})]$.

884. $y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^b (a > 0, b > 0)$.

解 两边取对数,得

$$\ln y = x\ln\frac{a}{b} + a(\ln b - \ln x) + b(\ln x - \ln a).$$

两端同时对 x 求导数,得

$$\frac{y'}{y} = \ln\frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}.$$

于是,

$$y' = y\left(\ln\frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b \left(\ln\frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}\right) (x > 0).$$

885. $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x} (a > 0)$.

解 $y' = a^a x^{a^a - 1} + a x^{a-1} a^{x^a}\ln a + a^x \cdot a^{a^x}\ln^2 a$.

886. $y = \lg^3 x^2$.

解 $y' = 3\lg^2 x^2 \cdot \frac{1}{x^2}2x\lg e$

$= \frac{6}{x}\lg e \cdot \lg^2 x^2 \qquad (x \neq 0)$.

或按 $y=(\lg e\cdot\ln x^2)^3=8\lg^3 e\cdot\ln^3|x|$ 求导数，有

$$y'=24\lg^3 e\cdot\left(\frac{1}{x}\ln^2|x|\right)^{*)}(x\neq 0).$$

*) $(\ln|x|)'=\frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}=\frac{1}{x}$，以后不再说明.

887. $y=\ln[\ln(\ln x)]$.

解 $y'=\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}(x>e)$.

888. $y=\ln[\ln^2(\ln^3 x)]$.

解
$$y'=\frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)}\cdot 2\ln(\ln^3 x)\frac{1}{\ln^3 x}\cdot 3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}$$
$$=\frac{6}{x\ln x\cdot\ln(\ln^3 x)}(x>e).$$

889. $y=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2(1+x)}$.

解
$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2(1+x)^2}$$
$$=\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)}(x>-1).$$

890. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

解
$$y'=\frac{1}{4}[\ln(x^2-1)-\ln(x^2+1)]'$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{x^2-1}-\frac{2x}{x^2+1}\right)=\frac{x}{x^4-1}(|x|>1).$$

891. $y=\frac{1}{4(1+x^4)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1+x^4}$.

解 $y=\frac{1}{4(1+x^4)}+\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)$,

$$y'=-\frac{4x^3}{4(1+x^4)^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x^4}\cdot 4x^3$$

$$=\frac{1}{x(1+x^4)^2}(x\neq 0).$$

892. $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

解 $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}[\ln|x\sqrt{3}-\sqrt{2}|$

$$-\ln|x\sqrt{3}+\sqrt{2}|]$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3x^2-2}\left(|x|>\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

893. $y=\frac{1}{1-k}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{\sqrt{k}}{1-k}\ln\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}$

$(0<k<1)$.

解 $y'=\frac{1}{1-k}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)$

$$-\frac{\sqrt{k}}{1-k}\left(\frac{\sqrt{k}}{1+x\sqrt{k}}+\frac{\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}\right)$$

$$=\frac{2}{(1-x^2)(1-kx^2)}(|x|<1).$$

894. $y=\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})$.

解 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$

解 $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}$

$+ \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$= \sqrt{x^2+a^2}$.

899. $y = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} (a > 0, b > 0)$.

解 $y' = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + x\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}\right)$

$= \frac{1}{a - bx^2}\left(|x| < \sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.

900. $y = \frac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2} + 3\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

解 $y' = \frac{6x^5 - 4x^3(2+3x^2)}{x^8}\sqrt{1-x^2}$

$- \frac{x(2+3x^2)}{x^4\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{1+\sqrt{1-x^2}}$

$\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \frac{3}{x}$

$= -\frac{8}{x^5\sqrt{1-x^2}} (0 < |x| < 1)$.

901. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

解 $y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \sec^2\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$= \frac{1}{\sin x} (0 < x - 2k\pi < \pi; k$ 为整数).

902. $y=\ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

解 $$y'=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\sec^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\cos x}$$

$\left(|x-2k\pi|<\frac{\pi}{2};k\text{ 为整数}\right)$.

903. $y=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2x+\ln\sin x$.

解 $$y'=-\operatorname{ctg}x\cdot\csc^2x+\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$=-\operatorname{ctg}^3x\quad(0<x-2k\pi<\pi;k\text{ 为整数}).$$

904. $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

解 $$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos x}{1-\sin x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$$

$$=-\frac{1}{\cos x}\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi;k\text{ 为整数}\right).$$

905. $y=-\frac{\cos x}{2\sin^2x}+\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$.

解 $$y'=\frac{\sin^3x+2\sin x\cos^2x}{2\sin^4x}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{-\sin x}{1+\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$=\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}(0<x-2k\pi<\pi;k\text{ 为整数}).$$

906. $y=\ln\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}(0\leqslant|a|<|b|)$.

解 当 $a=0$ 时，$y=\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}$. 由于 $1+\sin x$ 非负，为使对数有意义，必须有

$$\begin{cases}1+\sin x>0,\\ \cos x>0.\end{cases}$$

当 $\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi<x<\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$（$k$ 为整数）时，上述不等式成立. 在此域内，得

$$y'=\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}.$$

当 $a\neq 0$ 时，记 $y=\ln u(x)$，而

$$u(x)=\frac{1+\frac{a}{b}\cos x+\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\sin x}{\frac{a}{b}+\cos x}$$

$$=\frac{1+\cos\varphi_0\cos x+\sin\varphi_0\sin x}{\cos\varphi_0+\cos x}$$

$$=\frac{1+\cos(x-\varphi_0)}{\cos x+\cos\varphi_0}=\frac{v_1(x)}{v_2(x)},$$

其中 $\varphi_0=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$. 显然 $v_1(x)\geqslant 0$. 为保证 y 可导，首先必须有 $u(x)>0$，故应有 $v_1(x)\neq 0$（从而 $v_1(x)>0$），进而应有 $v_2(x)>0$. 于是，y 的存在域 R 为满足不等式

$$\begin{cases} v_1(x) \neq 0, \\ v_2(x) > 0 \end{cases}$$

的一切 x 值，记成

$$R = \{x \mid v_1(x) \neq 0, v_2(x) > 0\},$$

则

$$R = \{x \mid \cos x + \cos\varphi_0 > 0 \text{ 且 } x \neq (2k+1)\pi + \varphi_0;$$

$$k \text{ 为整数}\}.$$

在此域内，得

$$y' = \frac{-\sin(x-\varphi_0)}{1+\cos(x-\varphi_0)} + \frac{\sin x}{\cos x + \cos\varphi_0}$$

$$= \frac{-\sin x\cos\varphi_0 + \cos x\sin\varphi_0}{1+\cos x\cos\varphi_0 + \sin x\sin\varphi_0}$$

$$+ \frac{\sin x}{\cos x + \cos\varphi_0}$$

$$= \frac{-\frac{a}{b}\sin x + \cos x \cdot \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}}{1 + \frac{a}{b}\cos x + \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\sin x}$$

$$+ \frac{\sin x}{\cos x + \frac{a}{b}}$$

$$= \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a + b\cos x},$$

其实此结果也包含了 $a = 0$ 时的情形.

907. $y = \frac{1}{x}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6)$.

解 $y' = -\frac{1}{x^2}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6)$

$$+ \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}\ln^2 x + \frac{6}{x}\ln x + \frac{6}{x}\right)$$

$$= -\frac{\ln^3 x}{x^2} \quad (x > 0).$$

908. $y = \frac{1}{4x^4}\ln\frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4}$.

解 $y' = -\frac{1}{x^5}\ln\frac{1}{x} - \frac{1}{4x^5} + \frac{1}{4x^5}$

$$= \frac{1}{x^5}\ln x \quad (x > 0).$$

909. $y = \frac{3}{2}(1 - \sqrt[3]{1+x^2})^2 + 3\ln(1 + \sqrt[3]{1+x^2})$.

解 $y' = \frac{3}{2}\cdot 2\left(1 - \sqrt[3]{1+x^2}\right)\left(-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}\right)$

$$+ \frac{3}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}\cdot\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$$

$$= \frac{2x}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

910. $y = \ln\left[\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}\right)\right]$.

解 $y' = \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}\right)}\left[-\frac{1}{x^2}\right.$

$$\left. + \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= -\frac{1+x+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{\left(1+x\ln\frac{1}{x}\right)\left[1+x\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]}$$

$(x>0)$.

911. $y = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$.

解 $y' = [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$

$$+ x\left[\frac{1}{x}\cos(\ln x) + \frac{1}{x}\sin(\ln x)\right]$$

$$= 2\sin(\ln x) \quad (x>0).$$

912⁺. $y = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x$.

解 $y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \sec^2\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x$

$$- \cos x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x$$

$= \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x \left(0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}\right.$；$k$ 为整数)．

913. $y = \arcsin\frac{x}{2}$.

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad (|x|<2).$

914. $y = \arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}$.

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} \quad (|x-1| < \sqrt{2}).$$

915. $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2}{a}$.

解 $$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{a}\right)^2} \cdot \frac{2x}{a} = \frac{2ax}{a^2+x^4} (a \neq 0).$$

916. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,ctg} \frac{\sqrt{2}}{x}$.

解 $$y' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2+2} \quad (x \neq 0).$$

917. $y = \sqrt{x} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}$.

解 $$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} \quad (x \geqslant 0).$$

918. $y = x + \sqrt{1-x^2} \operatorname{arc\,cos} x$.

解 $$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arc\,cos} x$$

$$- \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arc\,cos} x (|x| < 1).$$

919. $y = x \operatorname{arc\,sin} \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$.

解　$$y' = \arc\sin\sqrt{\frac{x}{1+x}} + \frac{x}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}} \cdot \frac{1+x-x}{(1+x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \arc\sin\sqrt{\frac{x}{1+x}} \quad (x \geqslant 0).$$

920. $y = \arc\cos\frac{1}{x}$.

解　$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1).$$

921. $y = \arc\sin(\sin x)$.

解　$$y' = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \operatorname{sgn}(\cos x)$$

$$\left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi;k \text{ 为整数}\right).$$

922. $y = \arc\cos(\cos^2 x)$.

解　$$y' = \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^4 x}} = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 x(1+\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \quad (x \neq k\pi;k \text{ 为整数}).$$

923. $y = \text{arc}\sin(\sin x - \cos x)$.

解 $$y' = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$$

$$\left(0 < x - k\pi < \frac{\pi}{2}; k \text{ 为整数}\right).$$

924. $y = \text{arc}\cos\sqrt{1 - x^2}$.

解 $$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (1 - x^2)}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (0 < |x| < 1).$$

925. $y = \text{arc}\,\text{tg}\,\frac{1 + x}{1 - x}$.

解 $$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^2} \cdot \frac{(1 - x) + (1 + x)}{(1 - x)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + x^2} \quad (x \neq 1).$$

926. $y = \text{arc}\,\text{ctg}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)$.

解

$$y' = \frac{-1}{1 + \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)^2}$$

$$\cdot \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= 1 \quad \left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}; k \text{ 为整数}\right).$$

解 $y' = \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} - 2\cos x \cdot \text{arc tg}(\sin x)$

$- \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}$

$= -2\cos x \cdot \text{arc tg}(\sin x).$

932. $y = \ln\left(\text{arc cos}\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$

解 $y' = \frac{1}{\text{arc cos}\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^{-1}}} \cdot \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{2x\sqrt{x-1}\,\text{arc cos}\frac{1}{\sqrt{x}}} \quad (x > 1).$

933. $y = \ln\frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b}\text{arc tg}\frac{x}{b}.$

解 $y' = \frac{1}{x+a} - \frac{x}{x^2+b^2} + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{b\left(1+\frac{x^2}{b^2}\right)}$

$= \frac{a^2+b^2}{(x+a)(b^2+x^2)} \quad (x > -a).$

934. $y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\text{arc sin}\frac{x}{a} \quad (a > 0).$

解 $y' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$

$+ \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$= \sqrt{a^2-x^2}.$

935. $y = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

解 $y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{1+x^3}\ (x\neq -1).$$

936. $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$.

解 $y'=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right.$

$$\left.-\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)^2}$$

$$\cdot\frac{\sqrt{2}(x^2-1)-2x^2\sqrt{2}}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^4}(|x|\neq 1).$$

937. $y=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$.

解 $y'=(\arcsin x)^2+\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$-\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+2-2$$

$$=(\arcsin x)^2(|x|<1).$$

938. $y=\frac{\arccos x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

解 $y' = \dfrac{-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arccos x}{x^2}$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\sqrt{1-x^2}} + \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= -\frac{\arccos x}{x^2} \ (0 < |x| < 1).$$

939. $y = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1} - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

解 $y' = \dfrac{1}{1+(x^2-1)} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$$+ \frac{x\ln x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} \ (x > 1).$$

940. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

解 $y' = \dfrac{1}{1-x^2} + \dfrac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$+ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)$$

$$= \frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \ (|x| < 1).$$

941. $y = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$.

解 $y' = \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{4x^3-2x}{x^4-x^2+1} - \dfrac{4x}{x^2+1}\right)$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}\right)^2}\left(\frac{-4\sqrt{3}x}{(2x^2-1)^2}\right)$$

$$=\frac{x^3}{1+x^6}\left(|x|\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

942. $y=\frac{x^6}{1+x^{12}}-\text{arc ctg}x^6$.

解 $y'\frac{6x^5(1+x^{12})-12x^{17}}{(1+x^{12})^2}+\frac{6x^5}{1+x^{12}}$

$$=\frac{12x^5}{(1+x^{12})^2}.$$

943[+]. $y=\ln\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}}}+\sqrt{3}\,\text{arc tg}\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}$.

解 $y'=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\cdot(1-\sqrt[3]{x})}$

$$-\frac{1}{2(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$+\sqrt{3}\frac{1}{1+\left(\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{x^2}}$$

$$=-\frac{1}{(1-x)\sqrt[3]{x}}(-\infty<x<1,x\neq 0).$$

944. $y=\text{arc tg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

解 $y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^2}$

$$\cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1+\sqrt{1-x^2})^2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \quad (|x|<1).$$

945. $y=\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}} (a>0)$.

解 $$y'=-\frac{1}{1+\dfrac{(a-2x)^2}{4(ax-x^2)}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\cdot\frac{-2\sqrt{ax-x^2}-\dfrac{(a-2x)^2}{2\sqrt{ax-x^2}}}{ax-x^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{ax-x^2}} \quad (0<x<a).$$

946. $y=\dfrac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\dfrac{1+x}{\sqrt{2}}$.

解 $$y'=-\frac{1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}-\frac{3-x}{2}\cdot\frac{1+x}{\sqrt{1-2x-x^2}}$$

$$+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

$$=\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} \quad (|x+1|<\sqrt{2}).$$

947. $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

解 $$y'=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}+x}\cdot\left(1+\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\left(\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}-1\right)\Bigg\}$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\right)^2}$$

$$\cdot\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}-\sqrt[4]{1+x^4}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\ (x\neq 0).$$

948. $y=\text{arc tg}(\text{tg}^2x)$.

解 $$y'=\frac{1}{1+\text{tg}^4x}\cdot 2\text{tg}x\sec^2x$$

$$=\frac{\sin 2x}{\sin^4x+\cos^4x}\ \left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi;k\text{ 为整数}\right).$$

949. $$y=\sqrt{1-x^2}\cdot\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

$$+\sqrt{1-x^2}+\text{arc}\sin x.$$

解 $$y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\left(-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{(1-\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}\right.$$

$$\left.+\frac{x}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$(0 < |x| < 1)$.

950. $y = x\text{arc tg } x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\text{arc tg } x)^2$.

解 $$y' = \text{arc tg } x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\text{arc tg } x = \frac{x^2}{1+x^2}\text{arc tg } x.$$

951. $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$.

解 $$y' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}}\left(e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

952. $y = \text{arc tg}(x + \sqrt{1+x^2})$.

解 $$y' = \frac{1}{1+(x+\sqrt{1+x^2})^2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

953. $y = \text{arc sin}\left(\frac{\sin\alpha\sin x}{1-\cos\alpha\cos x}\right)$.

解

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin\alpha\sin x}{1-\cos\alpha\cos x}\right)^2}}$$

$$\cdot\frac{\sin\alpha\cos x(1-\cos\alpha\cos x)-\sin\alpha\cos\alpha\sin^2 x}{(1-\cos\alpha\cos x)^2}$$

$$=\frac{1-\cos\alpha\cos x}{\sqrt{(\cos x-\cos\alpha)^2}}\cdot\frac{\sin\alpha\cdot(\cos x-\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha\cos x)^2}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cdot\operatorname{sgn}(\cos x-\cos\alpha)}{1-\cos\alpha\cos x}$$

($\cos x\neq\cos\alpha$,即 $x\neq\alpha+2k\pi$,k 为整数).

954. $y=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$.

解 $$y'=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}-\sqrt{3}\right)-\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}+\sqrt{3}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x^2+2}{x^2}}\cdot\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}-\sqrt{x^2+2}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}}\ (0<|x|<1).$$

955. $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$

$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}$.

解 $$y'=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{2x^2}{1+x^4}}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+x^4} - \frac{2\sqrt{2}x^4}{\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4}$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}\left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}\right.\right.$$

$$\left.-\sqrt{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}$$

$$\left.\left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}+\sqrt{2}\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\ (|x| \neq 1).$$

956. $y=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $y'=\frac{1}{(1+x^2)^2}\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right.\right.$

$$\left.\left.-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)(1+x^2)-2x^2\sqrt{1-x^2}\right]$$

$$+\frac{3}{\sqrt{2}\left(1+\frac{2x^2}{1-x^2}\right)}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$=\frac{4}{(x^2+1)^2\sqrt{1-x^2}}\ (|x|<1).$$

957⁺. $y=\operatorname{arc\,cos}(\sin x^2-\cos x^2)$.

$(|x|<1)$.

960. $y=\text{arc tg } e^x-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$.

解 $$y'=\frac{e^x}{1+e^{2x}}-\frac{1}{2}\left(2-\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)$$

$$=\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}.$$

961. $y=x+x^x+x^{x^x}(x>0)$.

解 $$y'=1+x^x(1+\ln x)+x^{x^x}(x^x\ln x)'$$

$$=1+x^x(1+\ln x)+x^x\cdot x^{x^x}\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right).$$

962. $y=x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^x}(a>0,x>0)$.

解 $$y'=x^{x^a}\left(ax^{a-1}\ln x+\frac{x^a}{x}\right)$$

$$+x^{a^x}\left(a^x\ln a\cdot\ln x+\frac{a^x}{x}\right)$$

$$+a^{x^x}\cdot\ln a\cdot x^x(1+\ln x)$$

$$=x^{a-1}x^{x^a}(1+a\ln x)+a^x x^{a^x}\left(\frac{1}{x}+\ln a\ln x\right)$$

$$+x^x\cdot a^{x^x}\ln a(1+\ln x).$$

963. $y=\sqrt[x]{x}\qquad(x>0)$.

解 $y'=\left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.

964. $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$.

解 $y'=(\sin x)^{\cos x}\left[-\sin x\cdot\ln(\sin x)+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right]$

$+(\cos x)^{\sin x}\left[\cos x\cdot\ln(\cos x)-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}\right]$

$=(\sin x)^{\cos x+1}[\operatorname{ctg}^2 x-\ln(\sin x)]$

$-(\cos x)^{\sin x+1}[\operatorname{tg}^2 x-\ln(\cos x)]$

$\left(0<x-2k\pi<\dfrac{\pi}{2},k\text{ 为整数}\right)$.

965⁺*. $y=(\ln x)^x:x^{\ln x}$.

解 $y=\dfrac{e^{x\ln(\ln x)}}{e^{\ln^2 x}}=e^{x\ln(\ln x)-\ln^2 x}$.

$y'=\dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\{[x\ln(\ln x)]'-(\ln^2 x)'\}$

$=\dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\left\{\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{2\ln x}{x}\right\}$

$=\dfrac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}}\{x\ln x\cdot\ln(\ln x)+x-2\ln^2 x\}$.

966. $y=\lg_x e$.

解 由 $y=\lg_x e$ 推得 $y=\dfrac{1}{\ln x}$.

于是，

$$y'=-\frac{1}{x\ln^2 x}=-\frac{1}{x}(\lg_x e)^2(x>0,x\neq 1).$$

---

* 题号右上角带"+"号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明，中译本基本是按俄文第二版翻译的．俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正．

967. $y=\ln(\operatorname{ch}x)+\frac{1}{2\operatorname{ch}^2x}$.

解 $y'=\operatorname{th}x-\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^3x}=\operatorname{th}^3x$.

968. $y=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2x}-\ln\left(\operatorname{cth}\frac{x}{2}\right)$.

解 $y'=\frac{\operatorname{sh}^3x-2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}^2x}{\operatorname{sh}^4x}+\frac{1}{2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{cth}\frac{x}{2}}$

$=-\frac{2}{\operatorname{sh}^3x}(x>0)$.

969. $y=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th}x)$.

解 $y'=\frac{1}{1+\operatorname{th}^2x}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}=\frac{1}{\operatorname{ch}2x}$.

970. $y=\arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right)$.

解 $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}}}\left(-\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2x}\right)$

$=\frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh}x)}{\operatorname{ch}x}\quad(x\neq 0)$.

971. $y=\frac{b}{a}x+\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)$

$(0\leqslant|b|<a)$.

解 $y'=\frac{b}{a}+\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}\operatorname{th}^2\frac{x}{2}}$

$\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\frac{1}{2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}$

$=\frac{b}{a}+\frac{a^2-b^2}{a(b+a\operatorname{ch}x)}=\frac{a+b\operatorname{ch}x}{b+a\operatorname{ch}x}$.

972. 引入中间变量 $u=\cos^2 x$ 求函数

$$y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})$$

的导函数.

解 $u=\cos^2 x, y=\ln(u+\sqrt{1+u^2})$,

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x,$$

而

$$y'_u=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\cos^4 x}},$$

$$u'_x=-2\cos x\sin x=-\sin 2x,$$

于是,

$$y'_x=-\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

利用 972 题所示的方法,求下列函数的导函数:

973⁺. $y=(\arccos x)^2\left[\ln^2(\arccos x)-\ln(\arccos x)+\frac{1}{2}\right]$.

解 设 $u=\arccos x$,则 $y=u^2\left(\ln^2 u-\ln u+\frac{1}{2}\right)$.

由于

$$y'_u=2u\left(\ln^2 u-\ln u+\frac{1}{2}\right)+u^2\left(\frac{2\ln u}{u}-\frac{1}{u}\right)$$

$$=2u\ln^2 u=2\arccos x\cdot\ln^2(\arccos x),$$

$$u'_x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

于是,

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\cdot\ln^2(\arccos x)\quad(|x|<1).$$

974$^+$. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt[4]{1+x^4})+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$.

解 设 $u=\sqrt[4]{1+x^4}$，则

$$y=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}u+\frac{1}{4}\ln\frac{u+1}{u-1}.$$

由于

$$y'_u=\frac{1}{2(1+u^2)}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)$$

$$=\frac{1}{1-u^4}=-\frac{1}{x^4},$$

$$u'_x=\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}},$$

于是，

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=-\frac{1}{x\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}\quad(x\neq 0).$$

975. $y=\frac{e^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\frac{1}{2}\ln(1-e^{-2x^2})$.

解 设 $u=e^{-x^2}$，则

$$y=\frac{u\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}+\frac{1}{2}\ln(1-u^2).$$

由于

$$y'_u=\frac{\left(\arcsin u+\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\sqrt{1-u^2}+\frac{u^2\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2}$$

$$-\frac{u}{1-u^2}$$

$$=\frac{\arcsin u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}},$$

$$u'_x=-2xe^{-x^2},$$

于是，

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{-2xe^{-x^2}\text{arc sin}(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}}$$

$(x \neq 0)$.

976. $y = \frac{a^x}{1+a^{2x}} - \frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\text{arc ctg}(a^{-x})$.

解 设 $u = a^x$，则

$$y = \frac{u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2}\text{arc ctg}(u^{-1}).$$

由于

$$y'_u = \frac{(1+u^2)-2u^2}{(1+u^2)^2} - \frac{-2u(1+u^2)-2u(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\text{arc ctg}(u^{-1}) - \frac{1-u^2}{1+u^2}\cdot\frac{1}{u^2\left(1+\frac{1}{u^2}\right)}$$

$$= \frac{4u\text{arc ctg}(u^{-1})}{(1+u^2)^2} = \frac{4a^x\cdot\text{arc ctg}(a^{-x})}{(1+a^{2x})^2},$$

$$u'_x = a^x\ln a,$$

于是，

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{4a^{2x}\ln a}{(1+a^{2x})^2}\text{arc ctg}(a^{-x})$$

$(a > 0)$.

977. 求函数的导函数并作函数及导函数的图形，设：

(a) $y = |x|$；(б) $y = x|x|$；(в) $y = \ln|x|$.

解 (a) $y = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geqslant 0 \text{ 时}, \\ -x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时}. \end{cases}$ （图 2.2）.

$$y' = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时}, \\ -1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时}, \end{cases} \text{或写成 } y' = \frac{|x|}{x}.$$

在 $x=0$ 时 y' 不存在(图 2.3).

(б) $y=\begin{cases} x^2, 当\ x\geqslant 0\ 时, \\ -x^2, 当\ x<0\ 时, \end{cases}$ (图 2.4).

$$y'=\begin{cases} 2x, 当\ x>0\ 时, \\ -2x, 当\ x<0\ 时, \end{cases}$$ 而且易见有 $y'|_{x=0}=0$,

故 $y'=2|x|$ *)(图 2.5).

*)　以下各题,对于分界点的导数,不再单独讨论.

(в) $y=\ln|x|$(图 2.6).

$$y'=\frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}=\frac{1}{x}(x\neq 0)\quad(图\ 2.7).$$

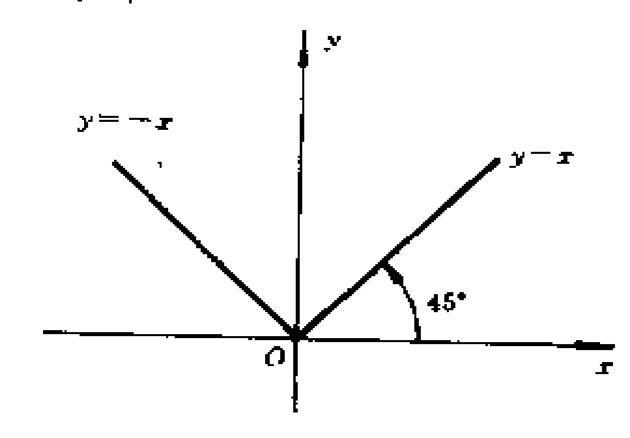


图 2.2

图 2.3

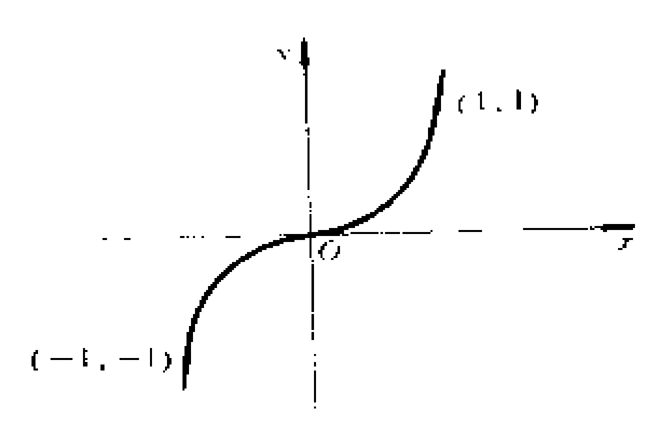


图 2.4

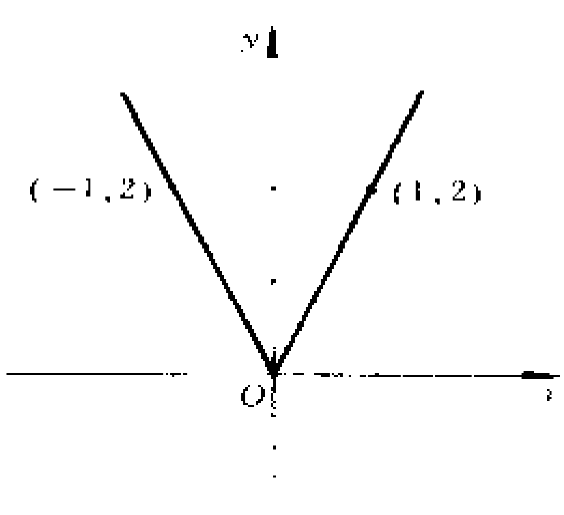


图 2.5

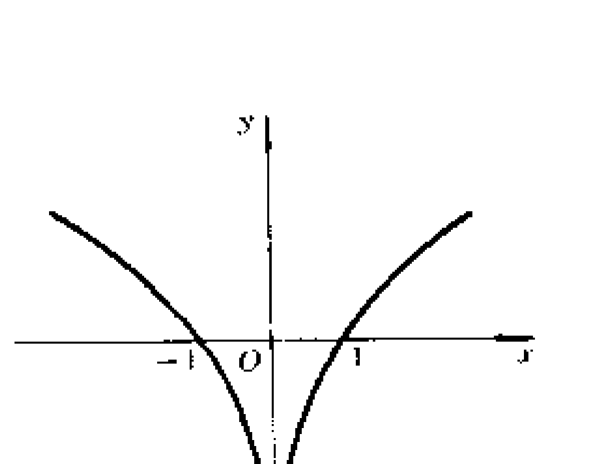


图 2.6

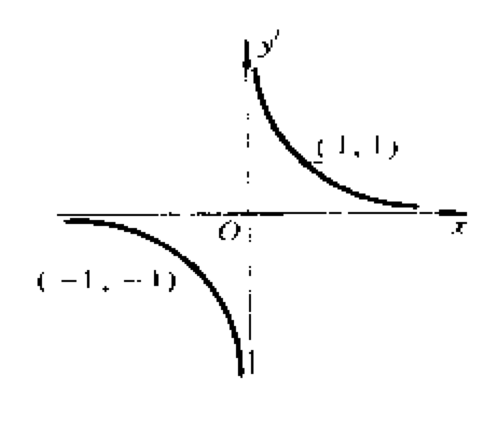


图 2.7

978. 求下列函数的导函数：

(a) $y = |(x-1)^2(x+1)^3|$；　　(б) $y = |\sin^3 x|$；

(в) $y = \arccos \dfrac{1}{|x|}$；　　(г) $y = [x]\sin^2 \pi x$.

解 (a) $y' = \frac{|(x-1)^2(x+1)|}{(x-1)^2(x+1)^3}[2(x-1)(x+1)^3$
$+ 3(x-1)^2(x+1)^2]$
$= (x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$
$(|x| \neq 1)$;

(б) $y' = \frac{|\sin^3 x|}{\sin^3 x} 3\sin^2 x \cos x$
$= \frac{3}{2}\sin 2x |\sin x| \quad (x \neq k\pi, k$ 为整数);

(в) $y' = \left[-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right] \cdot \left(-\left(\frac{|x|}{x \cdot x^2}\right)\right)$
$= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1)$;

(г) 对于 $y = [x]$ 有 $y' = 0$
$(x \neq k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,

于是,当 $x \neq k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时,有
$\{[x]\sin^2 \pi x\}' = 2\pi \sin \pi x \cos \pi x \cdot [x]$
$= \pi[x]\sin 2\pi x.$

容易直接验证当 $x = k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时上式也成立.

求导函数并作出函数及其导函数的图形:

979. $y = \begin{cases} 1-x & \text{当 } -\infty < x < 1; \\ (1-x)(2-x) & \text{当 } 1 \leqslant x \leqslant 2; \\ -(2-x) & \text{当 } 2 < x < +\infty. \end{cases}$ (图 2.8)

解 显然 $y' = \begin{cases} -1 & \text{当 } -\infty < x < 1; \\ 2x-3 & \text{当 } 1 < x < 2; \\ 1 & \text{当 } 2 < x < +\infty. \end{cases}$

解 $y' = \begin{cases} 2(x-a)(x-b)(2x-a-b), & 当\ x \in [a,b]; \\ 0, & 当\ x \overline{\in} [a,b]. \end{cases}$

(图 2.11)

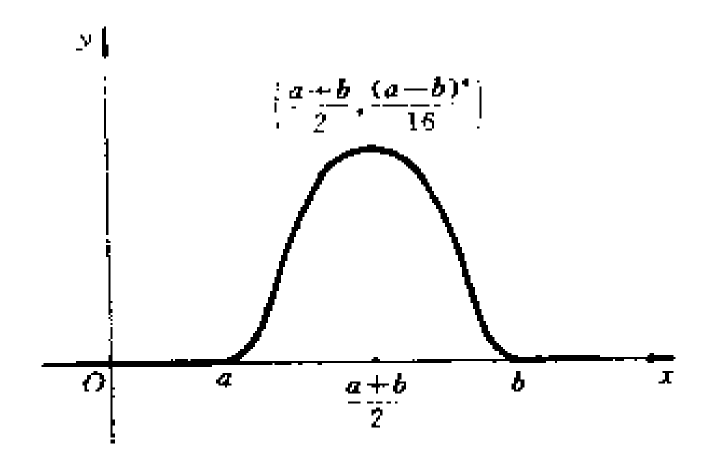


图 2.10

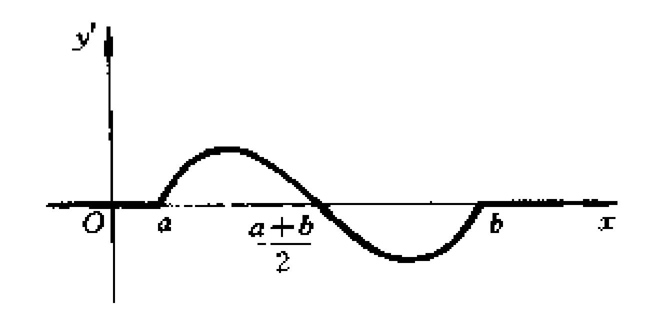


图 2.11

981. $y = \begin{cases} x & 当\ x < 0; \\ \ln(1+x) & 当\ x \geqslant 0. \end{cases}$ (图 2.12)

解 $y' = \begin{cases} 1 & 当\ x < 0; \\ \dfrac{1}{1+x} & 当\ x \geqslant 0. \end{cases}$ (图 2.13)

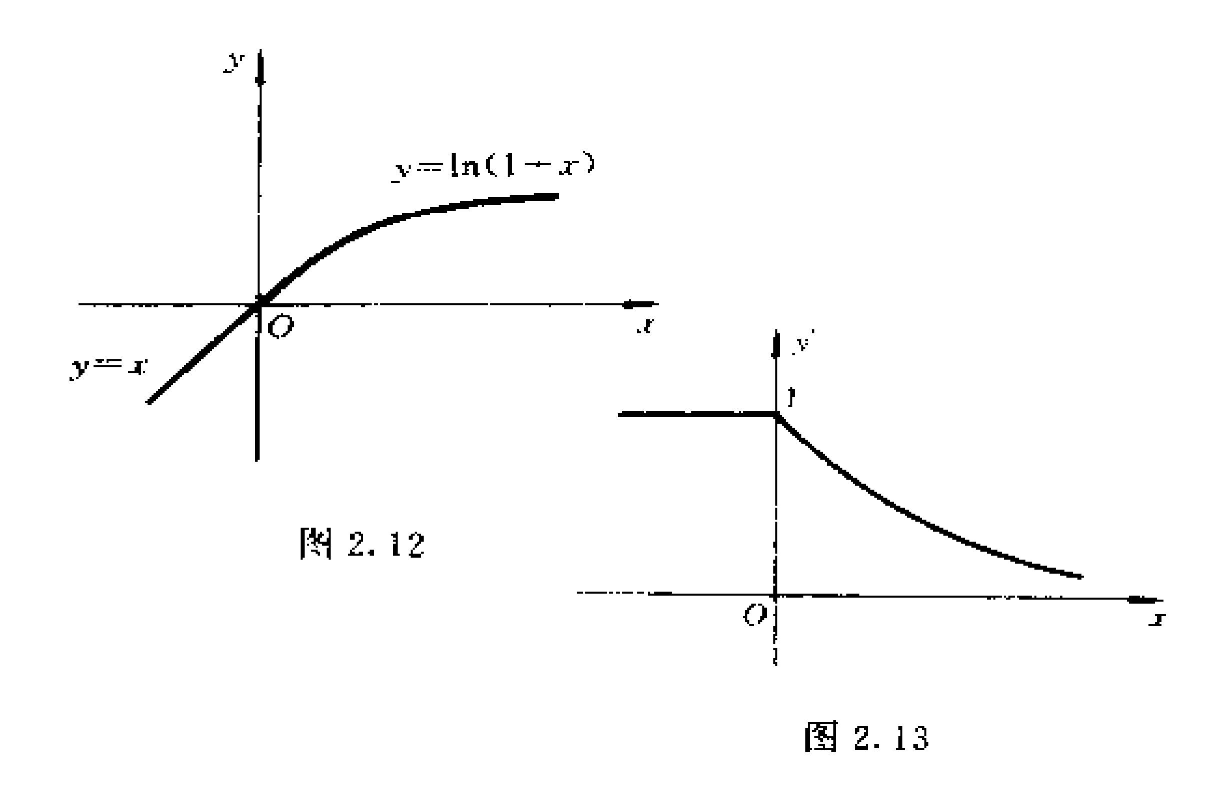


图 2.12

图 2.13

982. $y=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg}x, & \text{当 } |x|\leqslant 1;\\ \dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn}x+\dfrac{x-1}{2} & \text{当 } |x|>1.\end{cases}$ （图 2.14）

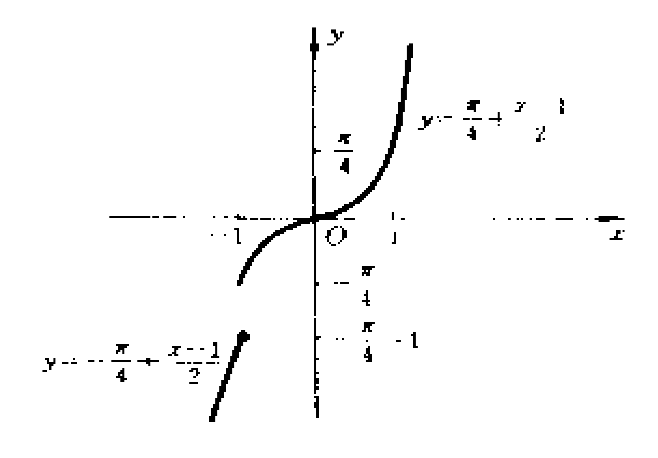


图 2.14

解 $y=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2} & 当 -1<x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{2} & 当 |x|>1.\end{cases}$ （图 2.15）

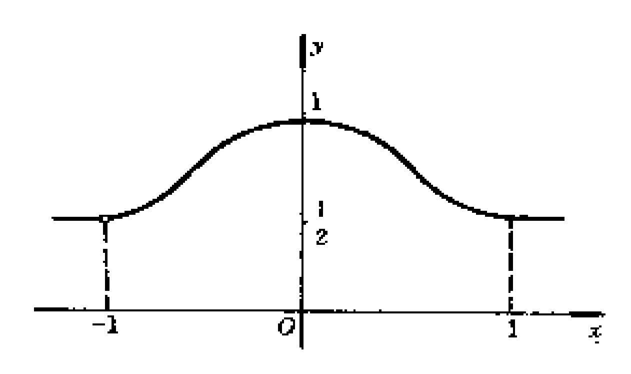


图 2.15

983. $y=\begin{cases}x^2e^{-x^2} & 当 |x|\leqslant 1;\\ \dfrac{1}{e} & 当 |x|>1.\end{cases}$ （图 2.16）

解 $y=\begin{cases}2xe^{-x^2}(1-x^2) & 当 |x|\leqslant 1;\\ 0 & 当 |x|>1.\end{cases}$ （图 2.17）

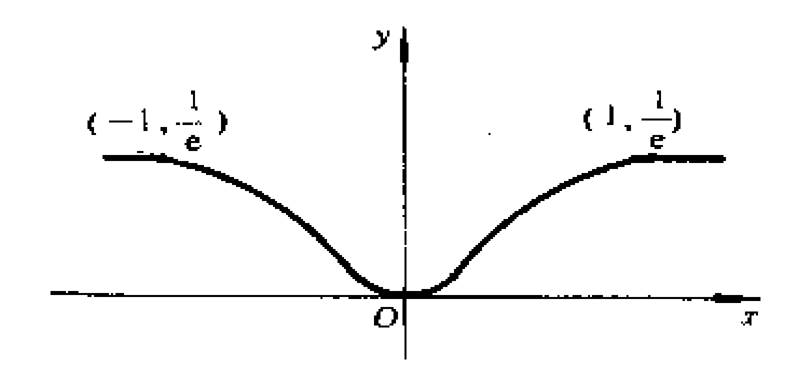


图 2.16

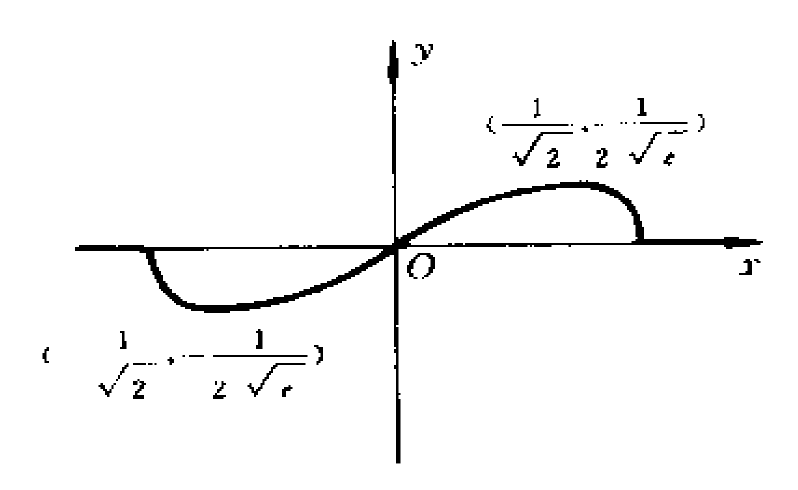


图 2.17

984. 由已知函数的对数得来的导函数称为此函数的**对数的导函数**：

$$\frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

已知函数 y，求其对数的导函数：

(а) $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$；(б) $y = \frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$；

(в) $y = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$；

(г) $y = (x+\sqrt{1+x^2})^n$.

解 (а) 由 $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 得

$$\ln y = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\ln|1+x|,$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)}$$

$$= \frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}(0 < |x| < 1);$$

(б) 由 $y=\dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$ 得

$$\ln y = 2\ln|x| - \ln|1-x| + \frac{1}{3}\ln|3-x|$$

$$-\frac{2}{3}\ln|3+x|,$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3(3-x)}$$

$$-\frac{2}{3(3+x)}$$

$$=\frac{54-36x+4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$$

$$(x\neq 0, x\neq 1, |x|\neq 3);$$

(в) 由于 $y=\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}$ 及 y 在对数符号内，故应设 $\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}>0$，从而有

$$\ln y = \ln\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln|x-a_i|,$$

得

$$\frac{d}{dx}\ln y = \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}\ (x\in R),$$

其中 $R=\left\{x\,\middle|\,\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}>0\right\}$；

(г) 由 $y=(x+\sqrt{1+x^2})^n$ 得

$$\ln y = n\ln(x+\sqrt{1+x^2}),$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.$$

985. 设 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为 x 的可微分函数. 求函数 y 的导函数，

若：

(a) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$；(б) $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$；

(в) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$　$[\varphi(x)\neq 0,\psi(x)>0]$；

(г) $y=\lg_{\varphi(x)}\psi(x)$　$[\varphi(x)>0,\psi(x)>0]$.

解　(a) $$y'=\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$$

$[\varphi^2(x)+\psi^2(x)\neq 0]$.

(б) $$y'=\frac{1}{1+\dfrac{\varphi^2(x)}{\psi^2(x)}}\cdot\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\varphi(x)}{\psi^2(x)}$$

$$=\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\varphi(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$$

$(\psi(x)\neq 0)$.

(в) 由 $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ 得

$$\ln y=\frac{1}{\varphi(x)}\ln\psi(x).$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}\varphi(x)-\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi^2(x)}$$

于是，

$$y'=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\left\{\frac{1}{\varphi(x)}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\ln\psi(x)\right\}.$$

(г) 由 $y=\lg_{\varphi(x)}\psi(x)$ 得

$$y=\frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)},$$

$$y' = \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\ln\varphi(x) - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}$$

$$= \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{1}{\ln\varphi(x)}$$

$$- \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}.$$

986. 求 y'，设：

(а) $y = f(x^2)$；　　　　(б) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$；

(в) $y = f(e^x) \cdot e^{f(x)}$；　(г) $y = f\{f[f(x)]\}$，

其中 $f(u)$ 表示可微分的函数.

解　(а) $y' = 2xf'(x^2)$；

(б) $y' = 2\sin x\cos x f'(\sin^2 x)$

$- 2\sin x \cos x f'(\cos^2 x)$

$= \sin 2x[f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]$；

(в) $y' = e^{f(x)}[f'(x)f(e^x) + e^x f'(e^x)]$；

(г) $y' = f'(x) \cdot f'[f(x)] \cdot f'\{f[f(x)]\}$.

987. 证明 n 阶行列式微分法：

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) & \frac{d}{dx}f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

证　证法一:从行列式的定义出发予以证明.

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{d}{dx}\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}f_1j_1(x)f_2j_2(x)\cdots f_nj_n(x)^{*)}$$

$$= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}\frac{d}{dx}[f_1j_1(x)f_2j_2(x)\cdots \cdot f_nj_n(x)]$$

$$= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}\sum_{i=1}^{n}f_1j_1(x)f_2j_2(x)\cdots \frac{d}{dx}f_ij_i(x)\cdots f_nj_n(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}f_1j_1(x)f_2j_2(x)\cdots \frac{d}{dx}f_ij_i(x)\cdots f_nj_n(x)$$

$$
= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) & \frac{d}{dx}f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{in}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.
$$

*） 其中 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots n$ 的所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

证法二：利用数学归纳法予以证明.

由于

$$
\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{d}{dx}[f_{11}(x)f_{22}(x) - f_{12}(x)f_{21}(x)]
$$

$$
= \left[\frac{d}{dx}f_{11}(x)\cdot f_{22}(x) - \frac{d}{dx}f_{12}(x)\cdot f_{21}(x)\right]
$$

$$
+ \left[\frac{d}{dx}f_{22}(x)\cdot f_{11}(x) - \frac{d}{dx}f_{21}(x)\cdot f_{12}(x)\right]
$$

$$
= \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}f_{11}(x) & \frac{d}{dx}f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix}
+ \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ \frac{d}{dx}f_{21}(x) & \frac{d}{dx}f_{22}(x) \end{vmatrix},
$$

知等式(1)对于 $n=2$ 时成立.

今假定等式(1)对于 $n=k$ 时成立，即

$$= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} \frac{d}{dx}$$

$$\left[f_{k+1\,j}(x) \begin{vmatrix} f_{11}(x)\cdots f_{1\,j-1}(x)\ f_{1\,j+1}(x)\cdots f_{1\,k+1}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{i1}(x)\cdots f_{i\,j-1}(x)\ f_{i\,j+1}(x)\cdots f_{i\,k+1}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{k1}(x)\cdots f_{k\,j-1}(x)\ f_{k\,j+1}(x)\cdots f_{k\,k+1}(x) \end{vmatrix} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} \cdot$$

$$\left[\frac{d}{dx} f_{k+1\,j}(x) \begin{vmatrix} f_{11}(x)\cdots f_{1\,j-1}(x)\ f_{1\,j+1}(x)\cdots f_{1\,k+1}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{i1}(x)\cdots f_{i\,j-1}(x)\ f_{i\,j+1}(x)\cdots f_{i\,k+1}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{k1}(x)\cdots f_{k\,j-1}(x)\ f_{k\,j+1}(x)\cdots f_{k\,k+1}(x) \end{vmatrix} \right.$$

$$+ f_{k+1\,j}(x) \cdot \frac{d}{dx}$$

$$\left. \begin{vmatrix} f_{11}(x)\cdots f_{1\,j-1}(x)\ f_{1\,j+1}(x)\cdots f_{1\,k+1}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{i1}(x)\cdots f_{i\,j-1}(x)\ f_{i\,j+1}(x)\cdots f_{i\,k+1}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{k1}(x)\cdots f_{k\,j-1}(x)\ f_{k\,j+1}(x)\cdots f_{k\,k+1}(x) \end{vmatrix} \right]$$

$$
=\begin{vmatrix}
f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\
\vdots & & \vdots \\
\dfrac{d}{dx}f_{k+11}(x) & \cdots & \dfrac{d}{dx}f_{k+1k+1}(x)
\end{vmatrix}+
$$

$$
+\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+j+1}f_{k+1j}(x)\cdot\sum_{i=1}^{k}
$$

$$
\begin{vmatrix}
f_{11}(x)\cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x)\cdots & f_{1k+1}(x) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\dfrac{d}{dx}f_{i1}(x)\cdots & \dfrac{d}{dx}f_{ij-1}(x) & \dfrac{d}{dx}f_{ij+1}(x)\cdots & \dfrac{d}{dx}f_{ik+1}(x) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
f_{k1}(x)\cdots & f_{kj-1}(x) & f_{kj+1}(x)\cdots & f_{kk+1}(x)
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\
\vdots & & \vdots \\
\dfrac{d}{dx}f_{k+11}(x) & \cdots & \dfrac{d}{dx}f_{k+1k+1}(x)
\end{vmatrix}+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+j+1}f_{k+1j}(x)
$$

$$
\cdot\begin{vmatrix}
f_{11}(x)\cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x)\cdots & f_{1k+1}(x) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\dfrac{d}{dx}f_{i1}(x)\cdots & \dfrac{d}{dx}f_{ij-1}(x) & \dfrac{d}{dx}f_{ij+1}(x)\cdots & \dfrac{d}{dx}f_{ik+1}(x) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
f_{k1}(x)\cdots & f_{kj-1}(x) & f_{kj+1}(x)\cdots & f_{kk+1}(x)
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx}f_{k+11}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix}+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{k}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{ik+1}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_{k+11}(x) & \cdots & f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix}
$$

$$
=\sum_{i=1}^{k+1}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{ik+1}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_{k+11}(x) & \cdots & f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix}.
$$

故等式(1)对于 $n=k+1$ 时也成立.

于是,由数学归纳法知,等式(1)对于一切自然数 n 均成立.

988. 设:

$$
F(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix},
$$

求 $F'(x)$.

解 用上题结果,有

$$F'(x)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & x & 3\\ -2 & -3 & x+1\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix}x-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & x+1\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix}x-1 & 1 & 2\\ -3 & x & 3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(x^2+x+9)+(x^2-1+4)+(x^2-x+3)$$

$$=3(x^2+5).$$

989. 设：

$$F(x)=\begin{vmatrix}x & x^2 & x^3\\ 1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 2 & 6x\end{vmatrix},$$

求 $F'(x)$.

解 $$F'(x)=\begin{vmatrix}1 & 2x & 3x^2\\ 1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 2 & 6x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & x^2 & x^3\\ 0 & 2 & 6x\\ 0 & 2 & 6x\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix}x & x^2 & x^3\\ 1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 0 & 6\end{vmatrix}$$

$$=0+0+6(2x^2-x^2)=6x^2.$$

990. 已知函数的图形. 近似地作出其导函数的图形.

解 先由给定曲线 $y=f(x)$ 上一点 M，作出曲线 $y'=f'(x)$ 上的对应点 M'. 为清楚起见，作两个坐标系 Oxy 及 $O'x'y'$，取相同的单位，x 轴与 x' 轴平行，y 轴及 y' 轴平行且在一条直线上(如图 2.18).

在 Oxy 系内画出曲线 $y=f(x)$，在曲线上任取一点 $M(x,f(x))$，并作曲线在点 M 处的切线 MN. 过 $O'x'y'$ 系内的点 $P(-1,0)$ 作平行 MN 的直线 PQ 交 y' 轴于点 Q，于是

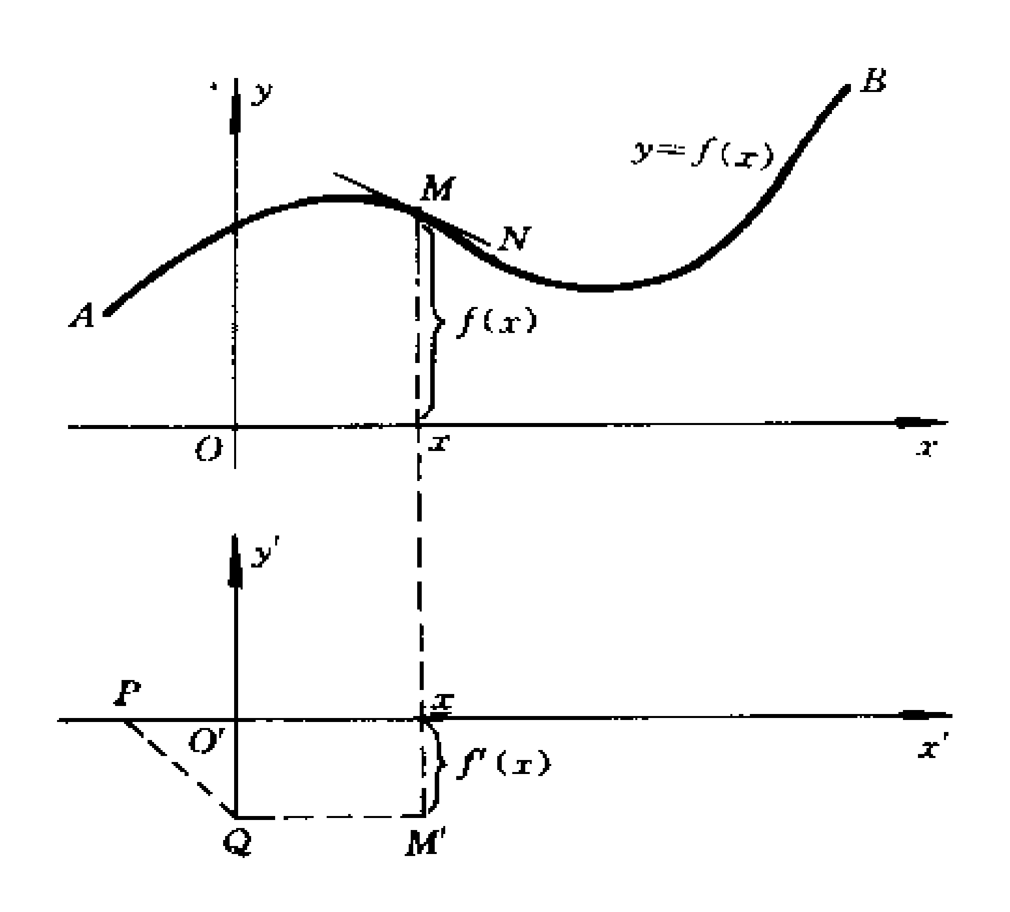


图 2.18

$$O'Q = \operatorname{tg}\alpha = f'(x),$$

即线段$O'Q$是对应于在点x的导函数$f'(x)$. 再过点Q引平行x轴的直线，交过点$(x,0)$且垂直于x轴的直线于点M'，则点M'就是曲线$y' = f'(x)$上对应于曲线$y = f(x)$上点M的点.

由此，我们就可由已给曲线$y = f(x)$作出曲线$y' = f'(x)$，按上述方法，在曲线$y = f(x)$上取若干点：

$$M_i(x_i, f(x_i))(i = 1,2,\cdots,n),$$

且在Oxy'系(相当于$O'x'y'$系，这是为了方便起见，分开画)内作出对应点：

$$M'_i(x_i, f'(x_i))(i = 1,2,\cdots,n).$$

最后用光滑曲线连接$M_1', M_2', \cdots, M_n'$各点，此即已给曲线$y = f(x)$对应的导函数$y' = f'(x)$的图形，如图 2.19 所示.

991. 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & 当\ x \neq 0; \\ 0 & 当\ x = 0. \end{cases}$$

有不连续的导函数.

证　当$x \neq 0$时，

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},$$

而

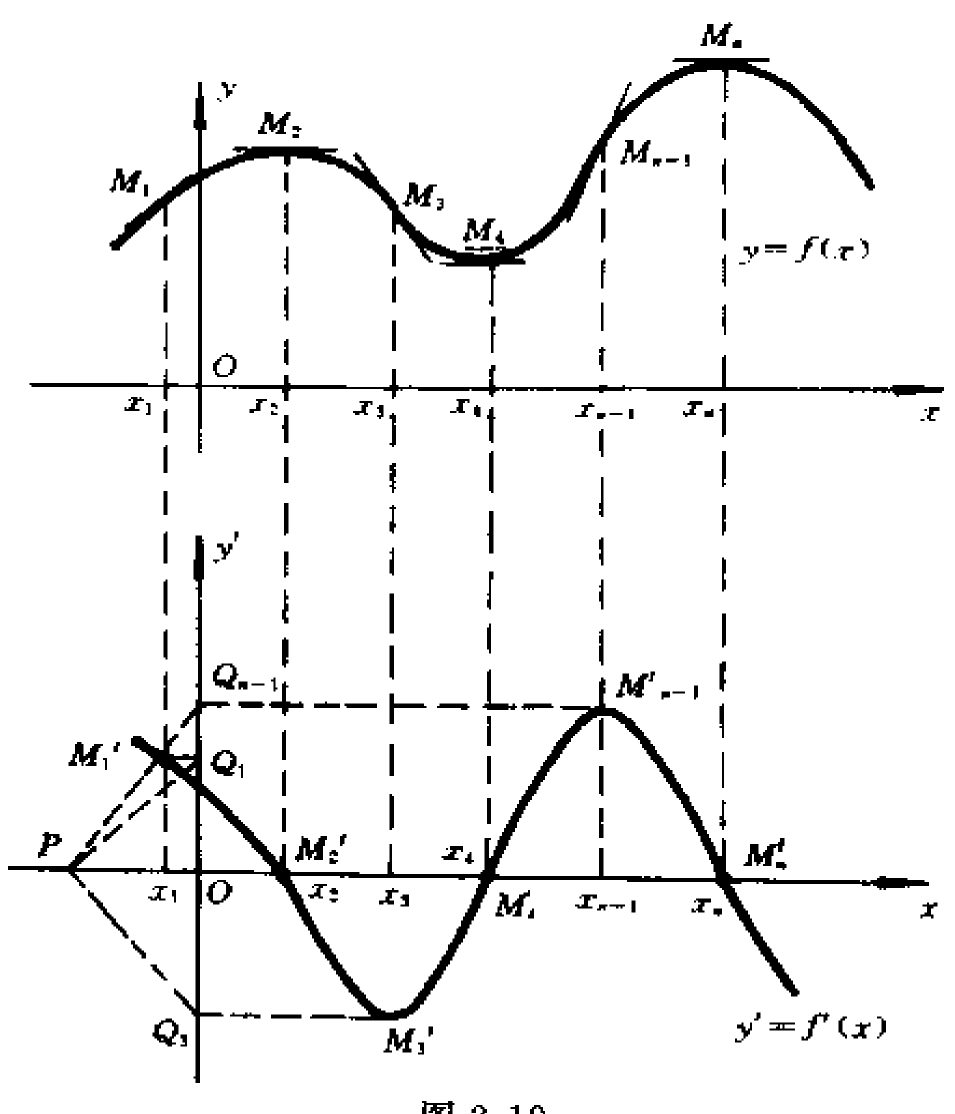


图 2.19

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}\right)=0,$$

故 $f'(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 中处处存在. 但当 $x\to 0$ 时, $f'(x)$ 并不趋向于任何极限, 所以 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处是间断的, 这就说明了 $f(x)$ 有不连续的导函数.

992. 在甚么条件下函数

$$f(x)=x^n\sin\frac{1}{x}(x\neq 0)\text{ 及 }f(0)=0$$

(a) 在 $x=0$ 处是连续的；(б) 在 $x=0$ 处可微分；

(в) 在 $x=0$ 处其导函数是连续的?

解 (a) 当 $n>0$ 时

$$\lim_{x\to 0}x^n\sin\frac{1}{x}=0,$$

于是，$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$，此时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的

(当 $n=\frac{p}{q}$ (p,q 互质) 且 q 为偶数时，只考虑在 $x=0$ 处右连续).

(б) 当 $n>1$ 时

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{n-1}\sin\frac{1}{\Delta x}=0,$$

于是，$f(0)=0$，即 $f(0)$ 在 $x=0$ 处是可微的；

(в) 当 $n>2$ 时，由于

$$f(x)=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}(x\neq 0),$$

故

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0,$$

而由(б) 可得 $f(0)=0$，所以 $\lim_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$. 这就说明当 $n>2$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的.

993. 在甚么条件下函数

$$f(x)=|x|^n\sin\frac{1}{|x|^m}(x\neq 0)\text{ 及 }f(0)=0$$

$(m > 0)$

有　(a) 于坐标原点的邻域上有有界的导函数；

(6) 在此域上有无界的导函数.

解　(a) 当 $x \neq 0, x \in (-\delta, \delta)(\delta > 0)$ 时，

$$f(x) = n|x|^{n-1}\frac{|x|}{x}\sin\frac{1}{|x|^m}$$

$$-\frac{m}{|x|^{m+1}}\cdot\frac{|x|}{x}\cdot|x|^n\cdot\cos\frac{1}{|x|^m}$$

$$=\frac{|x|}{x}\left(n|x|^{n-1}\sin\frac{1}{|x|^m}\right.$$

$$\left.-m|x|^{n-(m+1)}\cos\frac{1}{|x|^m}\right).$$

由于 $\frac{|x|}{x}, \sin\frac{1}{|x|^m}, \cos\frac{1}{|x|^m}$ 均为有界函数，于是当 $n \geqslant m+1$ 时，$f'(x)$ 为有界函数（易知此时 $f'(0)=0$）.

(6) 在此域上，当 $n-(m+1)<0$（即 $n<m+1$）时 $f'(x)$ 无界. 另一方面，同 992 题(6) 一样，当 $n>1$ 时 $f'(0)$ 才存在，因而所求的条件为

$$1<n<m+1 \quad (m>0).$$

994. 设：

$$f(x)=(x-a)\varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处是连续的，求 $f'(a)$.

解　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\varphi(a+\Delta x)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(a+\Delta x),$$

由于 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a)$. 于

$$y = f(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - a_k|,$$

它在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 点均连续，而在这些点均无导数.

997. 证明：函数

$$f(x) = x^2 \left|\cos \frac{\pi}{x}\right| \ (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0$$

在点 $x = 0$ 的任何邻域上有不可微分的点，但在 $x = 0$ 这点是可微分的.

作出此函数的略图.

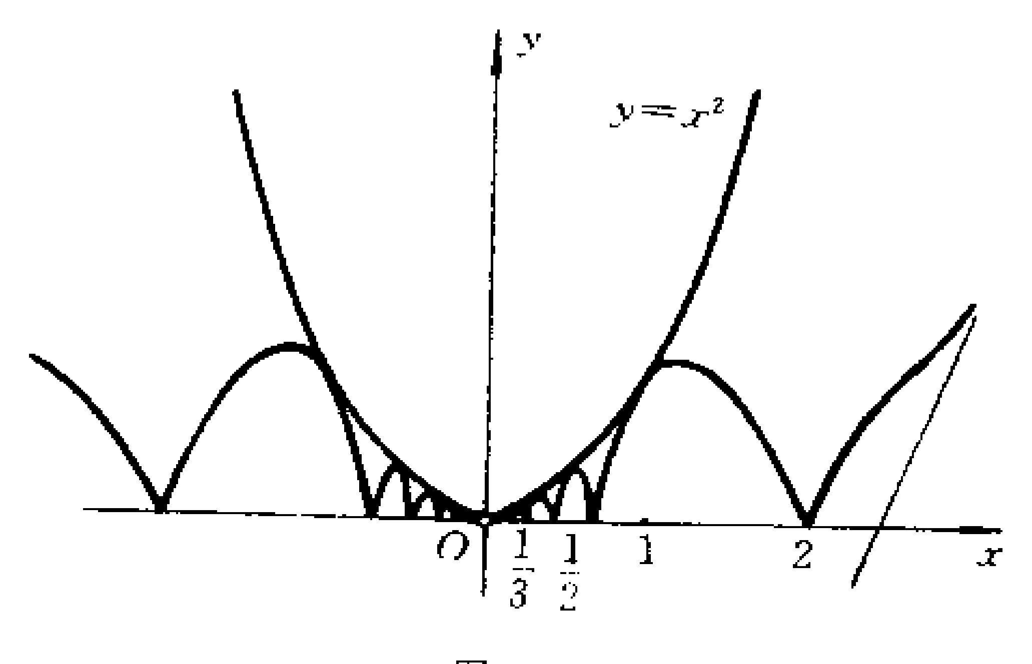


图 2.20

证　对于函数 $f(x)$，我们有

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \left|\cos \frac{\pi}{x}\right|}{x} = 0,$$

故 $f'(0) = 0$，即在 $x = 0$ 处函数 $f(x)$ 是可微的.

下面我们将指出对于 $x = 0$ 的任何邻域 $(-\delta, \delta)$（其

中 $\delta > 0$) 中，函数 $f(x)$ 总有不可微分的点. 事实上，令

$$x_n = \frac{1}{n + \frac{1}{2}},$$

则当 n 充分大时，总可使 $0 < x_n < \delta$，从而点 $x_n \in (-\delta, \delta)$. 对于这样的点 x_n，有

$$f'_-(x_{2n}) = \pi \quad 及 \ f'_+(x_{2n}) = -\pi.$$

所以

$$f'_-(x_{2n}) \neq f'_+(x_{2n}).$$

同法可得

$$f'_-(x_{2n+1}) \neq f'_+(x_{2n+1}).$$

于是，函数 $f(x)$ 在点 x_n 处不可微.

函数的图形全在 Ox 轴上方，包括原点；当 $x = \frac{2}{2n+1}$ 时，$f(x) = 0$，且 $f'(x)$ 不存在. 此函数的略图如图 2.20 所示.

998. 证明：函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, 若\ x\ 为有理数, \\ 0, 若\ x\ 为无理数, \end{cases}$$

仅在 $x = 0$ 时有导数.

证
$$\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \begin{cases} \Delta x, 当\ \Delta x\ 为有理数, \\ 0, 当\ \Delta x\ 为无理数. \end{cases}$$

于是，有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 0.$$

即

$$f'(0)=0.$$

其次，对于任一点 $x\neq 0$，分两种情形讨论函数的可微性：

(1) x 为有理数. 取一无理数叙列 $\{x_n\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，则有

$$\lim_{x_n\to x}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}=\lim_{x_n\to x}\frac{0-x^2}{x_n-x}=\infty.$$

由此可知，函数 $f(x)$ 在任一有理点($\neq 0$) 不可微.

(2) x 为无理数. 取一异于零的有理数叙列 $\{x_n'\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=x$，则有

$$\lim_{x_n'\to x}\frac{f(x_n')-f(x)}{x_n'-x}=\lim_{x_n'\to x}\frac{x_n'^2}{x_n'-x}=\infty.$$

由此可知，函数 $f(x)$ 在任一无理点也不可微.

总上所述，函数 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 时有导数.

999. 研究下列函数的可微性：

(a) $y=|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$;

(б) $y=|\cos x|$;

(в) $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$;

(г) $y=\arcsin(\cos x)$;

(д) $y=\begin{cases}\dfrac{x-1}{4}(x+1)^2 & 当\ |x|\leqslant 1;\\ |x|-1 & 当\ |x|>1.\end{cases}$

解 (a) 当 $x\neq 1$ 或 $x\neq 2$ 或 $x\neq 3$ 时，函数均可微. 现在我们来考察在 1,2,3 这三点的可微性.

1. 当 $x=1$ 时，由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}|(\Delta x-1)^2(\Delta x-2)^3|,$$

故 $\lim\limits_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=8$, $\lim\limits_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-8$.

因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在，由此可知 y 在 $x=1$ 点不可微；

2. 当 $x=2$ 时，由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x|(\Delta x+1)(\Delta x-1)^3|,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

因而 y 在 $x=2$ 点可微；

3. 当 $x=3$ 时，由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x|(\Delta x+2)(\Delta x+1)^2\Delta x|,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

因而 y 在 $x=3$ 点可微.

(б) $y=|\cos x|$ 在 $x=\frac{2k-1}{2}\pi$（k 为整数）点不可微分.

(в) $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$ 只可能在 $x=\pm\pi$ 的点不可微分.

现在我们来考察在 $x=-\pi$ 及 $x=\pi$ 时函数 y 的可微性.

1. 当 $x=\pi$ 时，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\pi^2-(\pi+\Delta x)^2|\sin^2(\pi+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\sin\Delta x\sin\Delta x|2\pi\Delta x+(\Delta x)^2|}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

所以函数 y 在 $x=\pi$ 点可微.

2. 同理可证函数 y 在 $x=-\pi$ 点也可微.

于是，函数 $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$ 处处可微分.

(г) $y=\arcsin(\cos x)$ 在 $|\cos x|=1$ 的点不可微分，即在 $x=k\pi$(k 为整数) 的点不可微分.

(д) 函数 y 对于 $|x|\neq 1$ 的点均可微. 现在我们来考虑函数 y 在 $|x|=1$ 点的可微性.

1. 当 $x=1$ 时，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases}\frac{1}{4}(\Delta x+2)^2, & \text{当 } \Delta x<0;\\ 1, & \text{当 } \Delta x>0;\end{cases}$$

于是，

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1 \text{ 及 } \lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1,$$

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$，即函数 y 在 $x=1$ 点可微.

2. 当 $x=-1$ 时，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=$$

$$\begin{cases}\dfrac{|-1+\Delta x|-1}{\Delta x}=-1, & \text{当 } \Delta x<0 \text{ 时},\\ \dfrac{\frac{(-2+\Delta x)(\Delta x)^2}{4}}{\Delta x}=-\frac{1}{2}\Delta x+\frac{1}{4}(\Delta x)^2, & \text{当 } \Delta x>0 \text{ 时}.\end{cases}$$

于是，

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1 \text{ 及 } \lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

所以函数 y 在 $x=-1$ 点不可微分.

求函数 $f(x)$ 左侧和右侧的导函数 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$.

设：

1000. $f(x)=|x|$.

解 当 $x\neq 0$ 时，易见

$$f'_+(x)=f'_-(x)=\frac{|x|}{x}=\operatorname{sgn}x.$$

当 $x=0$ 时，

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\begin{cases}-1, & \text{当 } \Delta x<0 \text{ 时;}\\ 1, & \text{当 } \Delta x>0 \text{ 时.}\end{cases}$$

所以，

$$f'_+(0)=1, f'_-(0)=-1.$$

1001. $f(x)=[x]\sin\pi x$.

解 当 $x\neq$ 整数时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\pi[x]\cos\pi x;$$

当 x 为整数时，从定义出发得

$$f'_+(k)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{[k+\Delta x]\sin\pi(k+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{k\cos k\pi\sin(\pi\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=k\pi(-1)^k,$$

同法可得 $f'_-(k)=\pi(k-1)(-1)^k$.

1002. $f(x)=x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|(x\neq 0), f(0)=0$.

解　当 $x\neq\frac{2}{2k+1}$（k 为整数）时（即使 $\cos\frac{\pi}{x}\neq 0$ 的 x 值），

$$f'_-(x)=f'_+(x)$$

$$=\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|+\frac{\pi}{x}\frac{\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|}{\cos\frac{\pi}{x}}\sin\frac{\pi}{x}$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right)\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right);$$

当 $x=\frac{2}{2k+1}$ 时，从定义出发易得

$$f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right)=-\frac{2k+1}{2}\pi,$$

$$f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right)=\frac{2k+1}{2}\pi\text{（}k\text{ 为整数）}.$$

1003. $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$.

解　当 $\sqrt{2k\pi}<|x|<\sqrt{(2k+1)\pi}$（$k=0,1,2,\cdots$）时，

$$f'_+(x)=f'_-(x)=\frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$$

当 $x=0$ 时，

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\sqrt{\sin(\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=1;$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to-0}\left(-\sqrt{\frac{\sin(\Delta x)^2}{\Delta x^2}}\right)=-1.$$

当 $x=\sqrt{2k\pi}(k=1,2,\cdots)$ 时，我们有

$$f'_+(\sqrt{2k\pi})=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\sqrt{\sin(\sqrt{2k\pi}+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\sqrt{\frac{\sin[2\Delta x\sqrt{2k\pi}+(\Delta x)^2]}{2\Delta x\sqrt{2k\pi}+(\Delta x)^2}}\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{2k\pi}}{\Delta x}+1}$$

$$=+\infty;$$

同理，可得

$$f'_-(\sqrt{2k\pi})=-\infty(k=1,2,\cdots);$$

$$f'_\mp(\sqrt{(2k+1)\pi})=\mp\infty(k=1,2,\cdots).$$

1004. $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}(x\neq 0),f(0)=0.$

解 当 $x\neq 0$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2};$$

当 $x=0$ 时，

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=0.$$

1005. $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

解 当 $x\neq 0$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}};$$

当 $x=0$ 时，

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\sqrt{1-e^{-(\Delta x)^2}}}{\Delta x}$$

$$=-\lim_{\Delta x\to -0}\sqrt{\frac{1-e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}}=-1$$

同理可求得 $f'_+(0)=1$.

1006. $f(x)=|\ln|x||(x\neq 0)$.

解 当 $|x|\neq 1$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{|\ln|x||}{\ln|x|}\cdot\frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\,\frac{|\ln|x||}{\ln|x|},$$

分两种情况：

1° 当 $0<|x|<1$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=-\frac{1}{x};$$

2° 当 $|x|>1$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{1}{x};$$

当 $|x|=1$ 时，

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$\cdot\frac{\dfrac{(1+\Delta x)^2-1}{1+(1+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=1.$$

同理可求得

$$f'_-(-1)=-1, f'_+(1)=-1, f'_+(-1)=1.$$

1008. $f(x)=(x-2)\text{arc tg}\,\frac{1}{x-2}(x\neq 2), f(2)=0.$

解 当 $x\neq 2$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)$$

$$=\text{arc tg}\,\frac{1}{x-2}$$

$$+\frac{x-2}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2}\left[-\frac{1}{(x-2)^2}\right]$$

$$=\text{arc tg}\,\frac{1}{x-2}-\frac{x-2}{(x-2)^2+1};$$

当 $x=2$ 时，

$$f'_-(2)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\text{arc tg}\,\frac{1}{\Delta x}=-\frac{\pi}{2},$$

同理可求得 $f'_+(2)=\frac{\pi}{2}$.

1009. 证明：在 $x\neq 0$ 时函数 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$，在 $x=0$ 时 $f(0)=0$，在此点连续，但在此点既无左侧导数，又无右侧导数.

证 由于

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续.

其次,由于

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \sin\frac{1}{\Delta x},$$

不论 Δx 从左、右侧趋向于零,此极限均不存在,因此在点 $x=0$,函数 $f(x)$ 既无左侧导数,也无右侧导数.

1010. 设:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & 若\ x\leqslant x_0;\\ ax+b, & 若\ x>x_0.\end{cases}$$

为了使函数 $f(x)$ 于点 $x=x_0$ 处连续而且可微分,应当如何选取系数 a 和 b?

解 $f(x_0)=x_0^2=f(x_0-0)$,$f(x_0+0)=ax_0+b$. 当

$$x_0^2 = ax_0+b$$

时,函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 又因 $f'_-(x_0)=2x_0$,$f'_+(x_0)=a$,故当

$$a=2x_0$$

时,函数在点 x_0 处可微. 从而得

$$x_0^2 = 2x_0^2+b,$$

即 $$b=-x_0^2.$$

于是,所求的系数为

$$a=2x_0,b=-x_0^2.$$

1011. 设:

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 若\ x\leqslant x_0; \\ ax+b, & 若\ x>x_0, \end{cases}$$

其中函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 为左方可微分的. 应当选择如何的系数 a 和 b,使函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续而且可微分?

解 $F(x_0)=F(x_0-0)=f(x_0)$,

$F(x_0+0)=ax_0+b$. 当

$$f(x_0)=ax_0+b$$

时,函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续. 又因 $F'_-(x_0)=f'_-(x_0)$,$F'_+(x_0)=a$,故当

$$a=f'_-(x_0)$$

时,函数 $F(x)$ 在点 x_0 处可微分.

解方程组

$$\begin{cases} a=f'_-(x_0), \\ f(x_0)=ax_0+b, \end{cases}$$

即得所求的系数为

$$a=f'_-(x_0),b=f(x_0)-x_0f'_-(x_0).$$

1012. 适当地选定参数 A 与 c 用立方抛物线

$$y=A(x-a)(x-b)x-c)$$

在区域 $a\leqslant x\leqslant b$ 上把两个半直线:

$$y=k_1(x-a)\quad(-\infty<x<a)$$

及

$$y=k_2(x-b)\quad(b<x<+\infty)$$

光滑地连接起来.

解 对于立方抛物线，

$$y' = A[(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)],$$

此即曲线上在任一点切线的斜率.

当接点处两条曲线的切线重合时，它们就平滑地联接起来，此时应有相等的斜率. 于是，有

1°. 在点 $x=a$ 处，

$$A(a-b)(a-c)=k_1; \tag{1}$$

2°. 在点 $x=b$ 处，

$$A(b-a)(b-c)=k_2. \tag{2}$$

联立(1)和(2)式，解之得

$$A=\frac{k_1+k_2}{(b-a)^2},\quad c=\frac{ak_2+bk_1}{k_1+k_2}.$$

1013. 用抛物线 $y=a+bx^2\quad(|x|\leqslant c)$(其中 a 与 b 为未知的参数)去补充曲线 $y=\frac{m^2}{|x|}(|x|>c)$ 的部分，使所得的为一平滑曲线.

解 显见 $c>0$，否则在点 $x=c$ 处就不可能形成一平滑曲线. 此时，在点 $x=c$ 处两曲线的切线斜率相等，且有相同的纵坐标. 于是，有

$$(a+bx^2)'\Big|_{x=c}=\left(\frac{m^2}{|x|}\right)'\Big|_{x=c}$$

及

$$a+bc^2=\frac{m^2}{c}.$$

从而得

$$\begin{cases} 2bc = -\dfrac{m^2}{c^2}, \\ a + bc^2 = \dfrac{m^2}{c}. \end{cases}$$

解之，得

$$a = \frac{3m^2}{2c}, b = -\frac{m^2}{2c^3}.$$

由曲线的对称性可知. 在点 $x = -c$ 处，按上述系数 a 与 b 所确定的曲线 $y = a + bx^2$ 与曲线 $y = \dfrac{m^2}{|x|}$ 也联成一平滑曲线.

1014. 若：(a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数，而函数 $g(x)$ 在这点没有导数；(б) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者在点 x_0 都没有导数，可否断定它们的和

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

在点 $x = x_0$ 没有导数？

解 (a) 能. 因为

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x},$$

当 $\Delta x \to 0$，上式右端第一项的极限存在，而第二项的极限不存在. 因而当 $\Delta x \to 0$，左端的极限也不存在（否则差 $\dfrac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x} - \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ 的极限就存在，与 $g(x)$ 不可导相矛盾），这说明 $F(x)$ 在点 x_0 没有导数.

(б) 不能. 例如，

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2}, g(x) = \frac{x - |x|}{2},$$

它们在点 $x = 0$ 处都没有导数，但它们的和 $F(x) =$

$f(x)+g(x)=x$ 在点 $x=0$ 处有导数且为 1.

1015. 若：(a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数，而函数 $g(x)$ 在此点没有导数；(б) 在点 x_0 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都没有导数，可否断定他们的积

$$F(x)=f(x)g(x)$$

在点 $x=x_0$ 没有导数？

解 (a) 不能. 例如，

$f(x)=x$，在 $x=0$ 处有导数，

$g(x)=|x|$，在点 $x=0$ 没有导数，

而它们的积

$$F(x)=f(x)g(x)=x|x|$$

在点 $x=0$ 处有导数 · 事实上，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x|\Delta x|-0\cdot|0|}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0,$$

即有 $F'(0)=0$.

(б) 不能. 例如，

$f(x)=|x|$，$g(x)=|x|$，

在点 $x=0$ 它们都没有导数，但它们的积

$$F(x)=f(x)g(x)=(|x|)^2=x^2,$$

在点 $x=0$ 处有导数，且 $F'(0)=2x|_{x=0}=0$.

1016. 若：(a) 函数 $f(x)$ 于点 $x=g(x_0)$ 有导数，而函数 $g(x)$ 于点 $x=x_0$ 没有导数；(б) 函数 $f(x)$ 于点 $x=g(x_0)$ 没有导数，而函数 $g(x)$ 于点 $x=x_0$ 有导数；(в) 函数 $f(x)$

于点 $x=g(x_0)$ 没有导数及函数 $g(x)$ 于点 $x=x_0$ 没有导数，则函数

$$F(x)=f[g(x)]$$

于已知点 $x=x_0$ 的可微性怎样?

解 (а)$F'(x_0)$ 可能存在，也可能不存在. 例如，考察函数 $f(x)$、$g(x)$ 及点 x_0 如下：

1°$f(x)=x^2, g(x)=|x|$，点 $x=0, g(0)=0$. $f'(0)=0, g'(0)$ 不存在；而 $F(x)=f[g(x)]=(|x|)^2=x^2, F'(0)=0$. 这是 $F'(x_0)$ 存在的一例.

2°$f(x)=x, g(x)=|x|$，点 $x=0, g(0)=0$. $f'(0)=1, g'(0)$ 不存在；而 $F(x)=f[g(x)]=|x|$，$F'(0)$ 不存在. 这是 $F'(x_0)$ 不存在的一例.

(б)$F'(x_0)$ 可能存在，也可能不存在. 例如，

1°$f(x)=|x|, g(x)=x^2$，点 $x=0, g(0)=0$. $f'(0)$ 不存在，$g'(0)$ 存在，且等于零；而 $F(x)=f[g(x)]=|x^2|=x^2, F'(0)$ 存在，且等于零.

2°$f(x)=|x|, g(x)=x$，点 $x=0, g(0)=0$. 而 $F(x)=f[g(x)]=|x|, F'(0)$ 不存在.

(в)$F'(x_0)$ 可能存在，也可能不存在，例如，

1°$f(x)=2x+|x|, g(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|$，点 $x=0, g(0)=0$. 则 $f'(0)$ 及 $g'(0)$ 均不存在；易知 $F(x)=f[g(x)]=2\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|\right)+\left|\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|\right|\equiv x$. 因此 $F'(0)$ 存在且等于 1.

$2^\circ f(x)=|x|,g(x)=|x|$，点 $x=0,g(0)=0$. $f'(0)$ 及 $g'(0)$ 均不存在；而 $F(x)=f[g(x)]=|x|$，$F'(0)$ 也不存在.

1017. 在函数

$$y=x+\sqrt[3]{\sin x}$$

的图形上哪些点处有垂直切线？作出这图形.

解 $y'=1+\dfrac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}(x\neq k\pi,k=0,\pm1,\cdots)$.

当 $x=k\pi$ 时，容易直接算出

$$y'|_{x=k\pi}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{k\pi+\Delta x+\sqrt[3]{\sin(k\pi+\Delta x)}-k\pi}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\sqrt[3]{\frac{(-1)^k}{(\Delta x)^2}\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}\right)$$

$$=\infty,$$

故当 $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时有垂直切线.

当 $x=k\pi$ 时，

$y=k\pi$；

当 $x=\dfrac{2k+1}{2}\pi$ 时，

$y=x\pm1$，

其图形如图 2.21 所示.

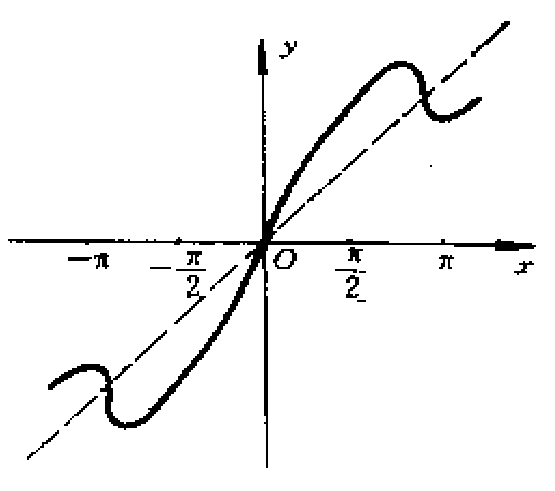


图 2.21

1018. 函数 $f(x)$ 在其不连续点

可否有:(a) 有穷的导数;(б) 无穷的导数?

解 (a) 不能. 否则由此可推出其连续性.

(б) 能. 例如,

$$y = f(x) = \operatorname{sgn} x$$

它在 $x = 0$ 点不连续,但

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{|\Delta x|}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{|\Delta x|} \to +\infty (\Delta x \to 0).$$

1019. 若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (a,b) 上可微分,且

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty,$$

则是否必有

(1) $\lim\limits_{x \to a+0} f'(x) = \infty$; (2) $\overline{\lim\limits_{x \to a+0}} |f'(x)| = +\infty$?

解 (1) 一般地说,不能保证 $\lim\limits_{x \to a+0} f'(x) = \infty$. 例如,对于 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内定义的函数

$$f(x) = \frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x},$$

显然有 $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \infty$. 但是,$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$, 对于特殊的一串数 $x_n = \dfrac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ $(k = 1,2,\cdots)$ 有 $f'(x_n) = 0$,所以 $\lim\limits_{n \to \infty} f'(x_n) = 0$,因而 $\lim\limits_{x \to +0} f'(x) = \infty$ 不成立.

(2) 必有 $\overline{\lim\limits_{x \to a+0}} |f'(x)| = \infty$.

由于 $f(x)$ 在 (a,b) 连续,且 $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$,故 $f(x)$ 在

$f(x_2) > M_1$，即点 $P_2 = (x_2, f(x_2))$ 位于 l 线之上方.

另一方面，由在 $x = B_0$ 点 $f(x)$ 的可微性，在 $x = B_0$ 右侧邻域内，对于任给 $\varepsilon_1 > 0\left(取 \varepsilon_1 < \frac{K}{2}\right)$，存在 δ，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$\left|f'(B_0) - \frac{f(x) - f(B_0)}{x - B_0}\right| < \varepsilon_1 < \frac{K}{2}.$$

于是，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$\left|\frac{f(x) - f(B_0)}{x - B_0}\right|$$

$$\leqslant |f'(B_0)| + \left|\frac{f(x) - f(B_0)}{x - x_0} - f'(B)\right|$$

$$< K + \varepsilon_1 < K + \frac{K}{2} = \frac{3}{2}K.$$

即有在 r 曲线 $y = f(x)$ 上：当 $0 < |x - B_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - f(B_0)| < \frac{3}{2}K|x - B_0|, \tag{4}$$

今取 $x_1 > B_0$　使 $x_1 < x_2, x_1 < B_0 + \delta$.

于是，由(3)式和(4)式知

$$f(x_1) - f(B_0) < \frac{3}{2}K(x_1 - B_0)$$

$$< 2K(x_1 - B_0) = Y(x_1) - f(B_0),$$

故

$$f(x_1) < Y(x_1),$$

即点 $(x_1, f(x_1))$ 位于直线 l 之下方.

考虑连续函数

$$G(x) = f(x) - Y(x),$$

我们取

$$c = \inf_{x \in (x_1, x_2)} \{x \mid G(x) > 0\},$$

则由 $G(x_1) < 0, G(x_2) > 0$，易见 c 是存在的，而且 $G(c) = 0$. 它也就是连续函数 $G(x)$ 的一个中间值点.

考虑 $x_2 \geqslant x > c$，则有 $G(x) > 0$，即在 c 点附近且 $x > c$ 时，有

$$f(x) > Y(x).$$

从而

$$f(x) - f(c) > Y(x) - f(c) = Y(x) - Y(c).$$

注意 $x - c > 0$，故又有（当 $x > c$，且在 c 附近时）：

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > \frac{Y(x) - Y(c)}{x - c}.$$

上式两边取极限（让 $x \to c + 0$），并注意到函数的可微性，有 $f'(c + 0) = f'(c)$，于是有

$$f'(c) \geqslant Y'(c) = 2K.$$

此处 $c \in (x_1, x_2) \subset [B_0, B)$，这个不等式与 $|f'(x)| \leqslant K$ 式相抵触. 因此 $f'(x)$ 当 $x \in [B_0, B)$ 时是无界的. 这就完成了(2)的证明，从而命题得证.

注. 若利用以后的拉格朗日定理，则可很简单地证明此结论.

1020. 若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (a, b) 上可微分且

$$\lim_{x \to a+0} f'(x) = \infty,$$

是否必有

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty?$$

解 不一定. 例如:

$$f(x)=\sqrt[3]{x},$$

它在 $(0,b)(b>0)$ 上可微分, 且 $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$,

$$\lim_{x\to+0}f'(x)=+\infty,$$

然而

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\sqrt[3]{x}=0.$$

1021. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上可微分且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 由此能否推出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在?

解 不能. 例如, 函数

$$f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x},$$

它在 $(0,+\infty)$ 上可微分, $f'(x)=2\cos(x^2)-\dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$,

且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

然而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 不存在.

1022. 设有界函数 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上可微分且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在. 由此可否推出有穷的或无穷的 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在?

解 不能. 例如,

$$f(x)=\cos(\ln x),$$

它由 $(0,+\infty)$ 上有界且可微分, 其导数为

$$f'(x)=-\frac{\sin(\ln x)}{x},$$

同时有

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

然而 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 不存在.

1023. 对不等式可否逐项微分?

解 一般地说不行. 例如, 在 $(-\infty,0)$ 上有

$$2x \leqslant x^2 + 1,$$

但在此区间上不能对此不等式逐项微分, 因为在 $(-\infty,0)$ 上不等式

$$2 \leqslant 2x$$

不成立.

1024. 导出表示和式

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

及

$$Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$$

的公式.

解 设 $\overline{P}_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n, \qquad (1)$

$$\overline{Q}_n = 1\cdot x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n. \qquad (2)$$

则 $(\overline{P}_n)' = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = P_n$,

$$(\overline{Q}_n)' = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1} = Q_n.$$

另一方面, 由(1)式得

$$\overline{P}_n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}.$$

由于$(\overline{P}_n)' = P_n$，即

$$\left[\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right]' = P_n,$$

于是，得

$$P_n = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

由(2)式得

$$\overline{Q}_n = x(1+2x+\cdots+nx^{n-1}) = xP_n.$$

由于$\overline{(Q_n)}' = Q_n$，所以

$$(xP_n)' = Q_n,$$

即

$$P_n + xP_n' = Q_n. \tag{3}$$

而

$$P_n' = \left[\frac{1-(n+1)x^n + nx^{n-1}}{(1-x)^2}\right]' =$$

$$\frac{[-n(n+1)x^{n-1}+n(n+1)x^n](1-x)^2+2(1-x)[1-(n+1)x^n+nx^{n+1}]}{(1-x)^4}$$

将P_n及P'_n代入(3)式，即得

$$Q_n = \frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

1025. 导出表示和式

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$$

及

$$T_n = \cos x + 2\cos 2x + \cdots + n\cos nx$$

的公式.

解 $S_n = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[2\sin\frac{x}{2}\sin x + 2\sin\frac{x}{2}\sin 2x + \cdots + 2\sin\frac{x}{2}\sin nx\right]$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \cdots + \left(\cos\frac{2n-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

即

$$S_n = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

又因

$$T_n = (S_n)' = \frac{\left[n\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x + (n+1)\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}\right]\sin\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$-\frac{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{n\left(\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{nx}{2}+\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}\right)\sin\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$-\frac{\sin\frac{nx}{2}\left(\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{n+1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}},$$

所以，

$$T_n=\frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

1026. 利用恒等式：

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}},$$

推出表示和式：

$$S_n=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$$

的公式.

解 对等式

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\tag{1}$$

两端分别求导数，即得

$$-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$

$$-\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$

$$-\cdots-\frac{1}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\sin\frac{x}{2^n}$$

$$=\frac{\cos x\sin\frac{x}{2^n}-\frac{1}{2^n}\sin x\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin^2\frac{x}{2^n}}. \qquad (2)$$

(2) ÷ (1) 得

$$-\frac{1}{2}\text{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\text{tg}\frac{x}{4}-\cdots-\frac{1}{2^n}\text{tg}\frac{x}{2^n}$$

$$=\text{ctg}x-\frac{1}{2^n}\text{ctg}\frac{x}{2^n},$$

所以，

$$\frac{1}{2}\text{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\text{tg}\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\text{tg}\frac{x}{2^n}$$

$$=\frac{1}{2^n}\text{ctg}\frac{x}{2^n}-\text{ctg}x$$

1027. 求证可微分的偶函数的导函数为奇函数，而可微分的奇函数的导函数为偶函数．

对这个事实加以几何解释．

证 设 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)=f(-x)$.

两端微分之，得

$$f'(x)=-f'(-x), \text{即 } f'(-x)=-f'(x).$$

这就说明 $f'(x)$ 是奇函数．

同理可证：可微分的奇函数的导函数为偶函数．

这个事实说明：凡对称于 Oy 轴的图形，其对称点

的切线也关于 Oy 轴对称；凡关于原点对称的图形，其对称点的切线互相平行.

1028. 求证可微分的周期函数，其导函数仍为具有相同周期的周期函数.

证 设 $f(x)$ 为周期函数，周期为 T，则

$$f(x+T)=f(x).$$

两端微分之，得

$$f'(x+T)=f'(x),$$

这说明 $f'(x)$ 为具有周期 T 的周期函数.

1029. 若圆半径以 2 厘米 / 每秒的等速度增加，则当圆半径 $R=10$ 厘米时，圆面积增加的速度如何？

解 设圆面积为 S，则 $S=\pi R^2$，

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{R=10}=2\pi R\left.\frac{dR}{dt}\right|_{R=10}=40\pi(\text{平方厘米 / 每秒}),$$

故当 R 为 10 厘米时，圆面积的增加速度为 40π 平方厘米 / 每秒.

1030. 长方形的一边 $x=20$ 米，另一边 $y=15$ 米，若第一边以 1 米 / 秒的速度减少，而第二边以 2 米 / 秒的速度增加，问这长方形的面积和对角线变化的速度如何？

解 面积 $S=xy$，对角线 $l=\sqrt{x^2+y^2}(x>0,y>0)$. 对 t 求导数，即得

$$\frac{dS}{dt}=x\frac{dy}{dt}+y\frac{dx}{dt}$$

及

当 $x \in (2, +\infty)$ 时，

$$S(x) = \frac{1}{2}2^2 + \frac{1}{2}(x-2)[2+(2x-2)]$$
$$= x^2 - 2x + 2.$$

从而有

$$S'(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant 2 \text{ 时}, \\ 2x-2, & \text{当 } 2 < x < +\infty \text{ 时}. \end{cases} \quad (\text{图 } 2.22)$$

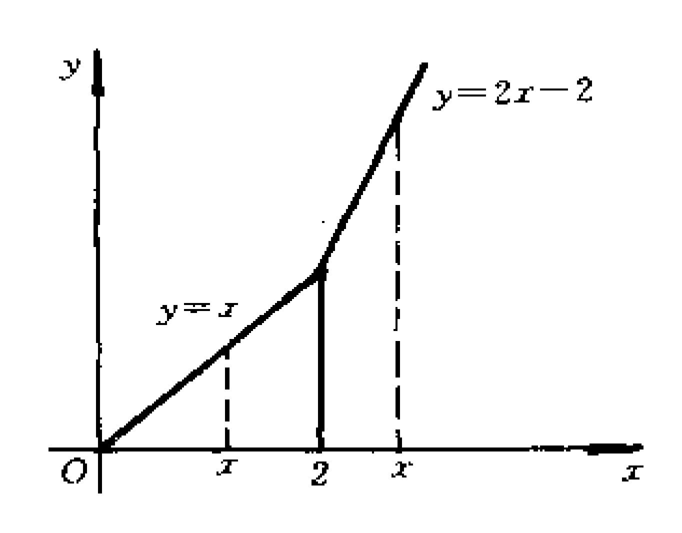


图 2.22

1033. 函数 $S(x)$ 是由圆弧 $y=\sqrt{a^2-x^2}$、轴 Ox 及通过点 O 和 $x(|x| \leqslant a)$ 而垂直于轴 Ox 的两条直线四者围成的面积．作出函数 $S(x)$ 的解析表达式，求出导函数 $S'(x)$，并作其导函数 $y=S'(x)$ 的图形．

解 $S(x)$ 是由一个直角三角形和一个中心角为 α 的扇形组成，其中 $\sin\alpha = \frac{|x|}{a}$，故当 $0<|x| \leqslant a$ 时，

$$S(x) = \frac{|x|}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{|x|}{a}.$$

于是，

$$S'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{|x|}{x}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{|x|}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{|x|}{x}$$

$$=\frac{|x|\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\sqrt{a^2-x^2}\operatorname{sgn}x\ (0<|x|\leqslant a).$$

函数 $y=S(x)$ 的图形如图 2.23 所示．函数 $y=S'(x)$ 的图形就是以原点为中心，a 为半径的圆周上位于第一及第三象限的弧段，但不包括 $(0,a)$ 点及 $(0,-a)$ 点，图形省略．

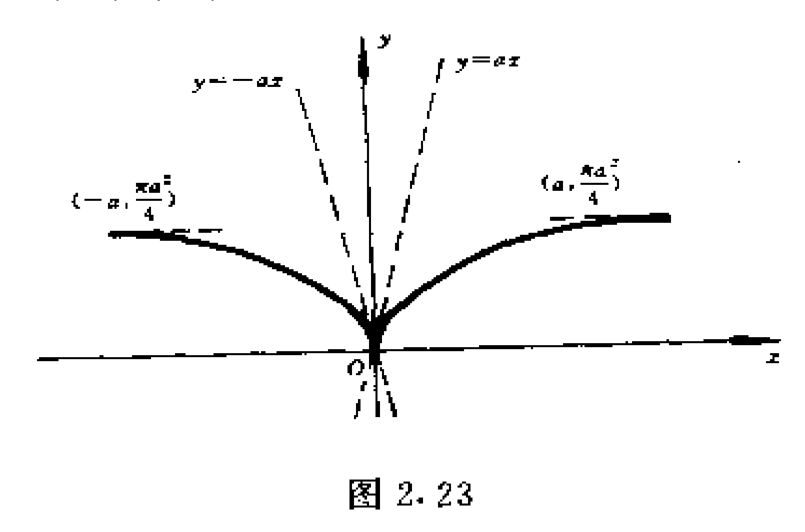


图 2.23

§2. 反函数的导函数．用参变数表示的函数的导函数．隐函数的导函数

1° 反函数的导函数　若具有导函数 $f'(x)\neq 0$ 的可微分的函数 $y=f(x)\ (a<x<b)$ 有单值连续的反函数 $x=f^{-1}(y)$，则此反函数也可

微分，且有公式

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}$$

成立．

2° 用参变数表示的函数的导函数　若方程组：

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad(\alpha<t<\beta),$$

其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 为可微分的函数，且 $\varphi'(t)\neq 0$，确定 y 为 x 的单值连续函数：

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x)),$$

则此函数的导函数存在，且可用公式

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$$

求出．

3° 隐函数的导函数　若可微函数 $y=y(x)$ 满足方程

$$F(x,y)=0,$$

则此隐函数之导函数 $y'=y'(x)$ 可从以下方程求得：

$$\frac{d}{dx}[F(x,y)]=0,$$

其中 $F(x,y)$ 是当作变量 x 的复合函数．

1034. 证明由方程 $y^3+3y=x$ 定义的单值函数 $y=y(x)$ 存在，并求它的导函数 y'_x.

证　对函数 $x=f(y)=y^3+3y$ 有

$$f'(y)=3y^2+3=3(y^2+1)>0$$

其中 y 为任意实数，故 $f(y)$ 是严格增大的（在 $-\infty<y<+\infty$），因此存在单值的反函数 $y=y(x)(-\infty<x<+\infty)$，且

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{3(y^2+1)}.$$

1035. 证明由方程 $y-\varepsilon\sin y=x(0\leqslant\varepsilon<1)$ 确定的单值函数

$y = y(x)$ 存在，并求其导函数 y'_x.

证 对于函数 $x = f(y) = y - \varepsilon\sin y$ 有

$$f'(y) = 1 - \varepsilon\cos y > 0 \ (0 \leqslant \varepsilon < 1).$$

故 $f(y)$ 在$(-\infty, +\infty)$上是严格增大的，从而反函数 $y = y(x)$ 存在且是单值的，且

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 - \varepsilon\cos y}.$$

1036. 设：

(a) $y = x + \ln x \ (x > 0)$； (б) $y = x + e^x$；

(в) $y = \operatorname{sh} x$； (г) $y = \operatorname{th} x$.

求它们的反函数 $x = x(y)$ 的存在域，并求它们的导函数.

解 (a) 由 $y'_x = 1 + \frac{1}{x} > 0 \ (x > 0)$ 知有单值连续反函数 $x = x(y)$，其存在域为 $-\infty < y < +\infty$，而导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x}{x + 1}.$$

(б) 由 $y'_x = 1 + e^x > 0$ 知有单值连续反函数 $x = x(y)$，其存在域为 $-\infty < y < +\infty$，而导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1 + e^x} = \frac{1}{1 - x + y}.$$

(в) 由 $y'_x = \operatorname{ch} x > 0$ 知有单值连续反函数 $x = x(y)$，其存在域为 $-\infty < y < +\infty$，而导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}},$$

其中因为 $x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$，所以，$e^x + e^{-x} =$

$2\sqrt{1+y^2}$.

(г) 由 $y'_x=\frac{1}{(\mathrm{ch}x)^2}>0$ 知有单值连续反函数 $x=x(y)$，其存在域为 $-1<y<1$. 由于

$$y^2=\mathrm{th}^2x=\frac{\mathrm{sh}^2x}{\mathrm{ch}^2x}=\frac{\mathrm{ch}^2x-1}{\mathrm{ch}^2x},$$

而 $\mathrm{ch}^2x=\frac{1}{y'_x}=x'_y$，于是，反函数的导函数

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{1-y^2}.$$

1037. 设：

(а) $y=2x^2-x^4$；　　(б) $y=\frac{x^2}{1+x^2}$；

(в) $y=2e^{-x}-e^{-2x}$.

选出反函数 $x=x(y)$ 的单值连续的各枝，求它们的导函数并作其图形.

解 (а) $x^4-2x^2+y=0$.

$$x^2=1\pm\sqrt{1-y}.$$

单值连续的各枝为

$$x_1=-\sqrt{1+\sqrt{1-y}}\quad(-\infty<y\leqslant 1),$$

$$x_2=-\sqrt{1-\sqrt{1-y}}\quad(0\leqslant y\leqslant 1),$$

$$x_3=\sqrt{1-\sqrt{1-y}}\quad(0\leqslant y\leqslant 1),$$

$$x_4=\sqrt{1+\sqrt{1-y}}\quad(-\infty<y\leqslant 1).$$

由 $y=2x^2-x^4$，微分得

$$1=4x\frac{dx}{dy}-4x^3\frac{dx}{dy},$$

所以

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4x - 4x^3}.$$

从而有

$$\frac{dx_i}{dy} = \frac{1}{4x(1 - x^2)} (i = 1,2,3,4)(图\ 2.24).$$

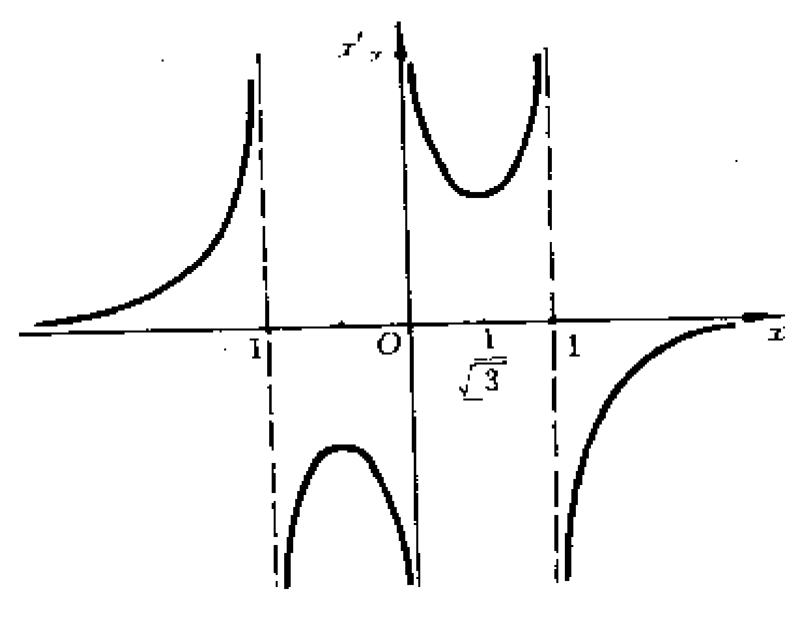


图 2.24

(6) $\frac{x^2}{1 + x^2} = y$,即 $x^2 = \frac{y}{1 - y}$.

单值连续各枝为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\sqrt{\frac{y}{1 - y}}, \\ x_2 &= \sqrt{\frac{y}{1 - y}} \end{aligned} \right\} \quad (0 \leqslant y < 1).$$

由 $y'_x = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}$

及 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x}$ 有

$$\frac{dx_i}{dy} = \frac{(1+x^2)^2}{2x} = \frac{x^3}{2y^2}.$$

当 $x_i \to 0$ 时，

$$\frac{dx_i}{dy} \to (\operatorname{sgn} x_i) \cdot (+\infty) \quad (i = 1, 2)$$（图 2.25）

（в）$y = 2e^{-x} - e^{-2x}$，解出 e^{-x}，得 $e^{-x} = 1 \pm \sqrt{1-y}$. 单值连续各枝为

$$x_1 = -\ln(1 + \sqrt{1-y}) \quad (-\infty < y \leqslant 1),$$

$$x_2 = -\ln(1 - \sqrt{1-y}) = \ln \frac{1+\sqrt{1-y}}{y} \quad (0 < y \leqslant 1).$$

由 $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$，对 y 求导数，得

$$1 = -2e^{-x}\frac{dx}{dy} + 2e^{-2x}\frac{dx}{dy}.$$

所以，

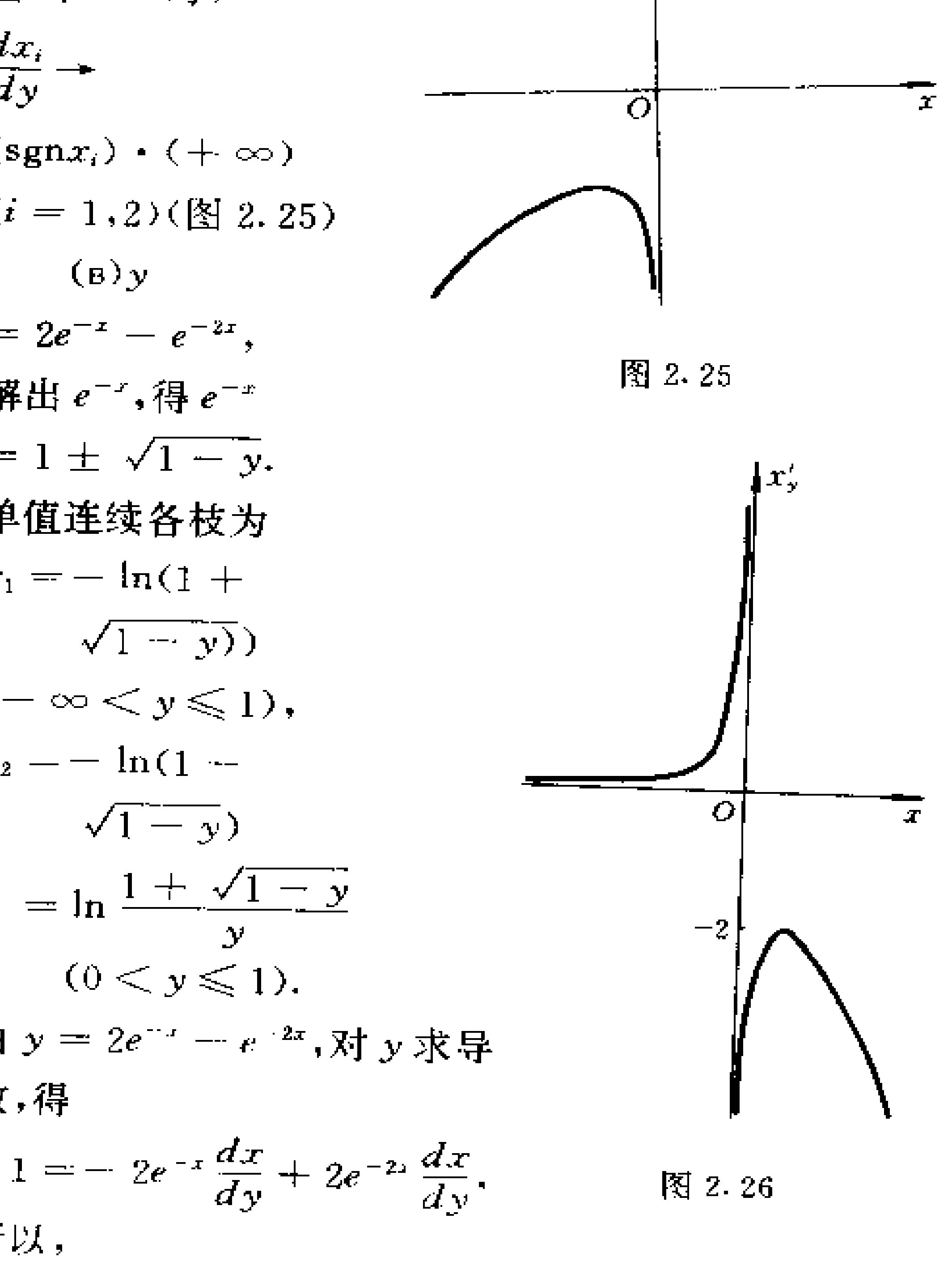


图 2.25

图 2.26

$$\frac{dx_i}{dy}=-\frac{1}{2(e^{-x}-e^{-2x})}$$

$(i=1,2)$(图 2.26).

1038. 作出函数 $y=y(x)$ 的略图，并求其导函数 y'_x，设：$x=-1+2t-t^2$，$y=2-3t+t^3$. 当 $x=0$ 及 $x=-1$ 时 $y'_x(x)$ 等于甚么？在何点 $M(x,y)$ 的导函数 $y'_x(x)=0$？

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3+3t^2}{2-2t}=-\frac{3}{2}(1+t).$$

当 $t=-1$，即 $x=-4$，$y=4$ 时. $y'_x(x)=0$.

当 $x=0$ 时，$t=1$，此时 $y'_x(x)=-3$；

当 $x=-1$ 时，$t=0$ 或 $t=2$，此时 $y'_x(x)=-\frac{3}{2}$ 或 $y'_x(x)=-\frac{9}{2}$.

列表：

t	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
y	-16	0	4	2	0	4	20	54

当 $t<-1$ 时，$\frac{dy}{dx}>0$，函数值 y 随自变量增加而增加，曲线上升.

当 $t>-1$ 时，$\frac{dy}{dx}<0$，曲线下降.

图形如图 2.27 所示.

求导函数 y'_x(参数是正数). 设：

1039. $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$,

$y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$.

解 $\frac{dy}{dt}$

$= -\frac{1}{6\sqrt[3]{t^2}\cdot\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}$,

$\frac{dx}{dt} =$

$-\frac{1}{6\sqrt{t}\cdot\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}}$,

图 2.27

于是，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \sqrt[6]{\frac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}} \quad (t > 0, t \neq 1).$$

1040. $x = \sin^2 t, y = \cos^2 t$.

解 $\frac{dy}{dt} = -2\cos t\sin t, \frac{dx}{dt} = 2\sin t\cos t$,

于是，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\cos t\sin t}{2\cos t\sin t} = -1 \quad (0 < x < 1).$$

1041. $x = a\cos t, y = b\sin t$.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t (0 < |t| < \pi)$.

1042. $x = a\operatorname{ch} t, y = b\operatorname{sh} t$.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{b\operatorname{ch} t}{a\operatorname{sh} t} = \frac{b}{a}\operatorname{cth} t \quad (t \neq 0)$.

1043. $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}$

$$= \frac{1}{1+t^2}.$$

于是，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\operatorname{sgn} t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = \operatorname{sgn} t \quad (0 < |t| < +\infty).$$

1047. 证明由方程组

$$x = 2t + |t|, y = 5t^2 + 4t|t|,$$

所确定的函数 $y = y(x)$ 当 $t = 0$ 时可微分．但它的导函数不能用普通的公式求得．

证 当 t 由 0 变化到 Δt 时，x 由 0 变化到 $\Delta x = 2\Delta t + |\Delta t|$，$y$ 由 0 变化到 $\Delta y = 5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|$．于是，

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{t=0} = \frac{5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|}{2\Delta t + |\Delta t|}$$

$$= \begin{cases} 3\Delta t, \Delta t > 0, \\ \Delta t, \Delta t < 0, \end{cases}$$

从而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 0 \quad (\Delta t \to 0).$$

即 $y = y(x)$ 当 $t = 0$ 时可微分．但由于 $|t|$ 当 $t = 0$ 时不可微，因而 $\frac{dx}{dt}$ 及 $\frac{dy}{dt}$ 当 $t = 0$ 时不存在．所以，导数 $\frac{dy}{dx}$ 当 $t = 0$ 的值不能从普通公式求得．

求下列隐函数的导函数 y'_x：

1048. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$．当 $x = 2$ 与 $y = 4$ 及当 $x = 2$ 与 $y = 0$ 时，y' 等于甚么？

解 对 x 微分，得

$$2x + 2xy'_x + 2y - 2yy'_x = 2.$$

于是，

$$y'_x = \frac{1-x-y}{x-y} \ (x \neq y).$$

$$y'_x\Big|_{\substack{x=2\\y=4}} = \frac{5}{2},\ y'\Big|_{\substack{x=2\\y=0}} = -\frac{1}{2}.$$

1049. $y^2 = 2px$（抛物线）.

解 对 x 微分，得

$$2yy'_x = 2p.$$

于是，

$$y'_x = \frac{p}{y} \ (y \neq 0).$$

1050. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$（椭圆）.

解 对 x 微分，得

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'_x}{b^2} = 0.$$

于是，

$$y'_x = -\frac{b^2x}{a^2y} \ (y \neq 0).$$

1051. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ 抛物线）.

解 对 x 微分，得

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}y'_x = 0.$$

于是，

$$y'_x = -\sqrt{\frac{y}{x}} \quad (x > 0, y > 0).$$

1052. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$（内摆线）.

解 对 x 微分，得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'_x = 0.$$

于是，

$$y'_x = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \quad (x \neq 0).$$

1053. $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$（对数螺线）.

解 对 x 微分，得

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{xy'_x - y}{x^2} = \frac{x + yy'_x}{x^2+y^2}.$$

于是，

$$y'_x = \frac{x+y}{x-y} \quad (x \neq y, x \neq 0).$$

1054. 求 y'_x，设：

(a) $r = a\varphi$（阿基米得螺线）；

(б) $r = a(1+\cos\varphi)$（心脏形线）；

(в) $r = ae^{m\varphi}$（对数螺线），

其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$ 及 $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ 表极坐标.

解 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$，其中 $r = r(\varphi)$. 于是，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi}. \tag{1}$$

(a) $\frac{dr}{d\varphi} = a$，代入(1)式得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin\varphi + a\varphi\cos\varphi}{a\cos\varphi - a\varphi\sin\varphi} = \operatorname{tg}(\varphi + \operatorname{arc\,tg}\varphi).$$

(б) $\frac{dr}{d\varphi} = -a\sin\varphi$，代入(1)式得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-a\sin^2\varphi+a(1+\cos\varphi)\cos\varphi}{-a\sin\varphi\cos\varphi-a(1+\cos\varphi)\sin\varphi}$$

$$=-\frac{\cos 2\varphi+\cos\varphi}{\sin 2\varphi+\sin\varphi}$$

$$=-\frac{2\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}$$

$$=-\operatorname{ctg}\frac{3\varphi}{2}\left(\varphi\neq 0,\varphi\neq\pm\frac{2\pi}{3}\right).$$

(в) $\frac{dr}{d\varphi}=mae^{m\varphi}$，代入(1)式得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{mae^{m\varphi}\sin\varphi+ae^{m\varphi}\cos\varphi}{mae^{m\varphi}\cos\varphi-ae^{m\varphi}\sin\varphi}$$

$$=\frac{m\sin\varphi+\cos\varphi}{m\cos\varphi-\sin\varphi}$$

$$=\operatorname{tg}\left(\varphi+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{m}\right).$$

§3. 导函数的几何意义

1° 切线和法线的方程　可微分的函数 $y=f(x)$ 在其图形上之一点 $M(x,y)$(图 2.28) 处的切线 MT 和法线 MN 的方程的形式分别是：

$$Y-y=y'(X-x)$$

及

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

其中 X,Y 为切线或法线上的流动坐标，而 $y'=f'(x)$ 为切点处导函数的值．

2° 切线长和法线长　PT 为次切线，PN 为次法线，MT 为切线，MN 为法线．设 $\operatorname{tg}\alpha=y'$(图 2.28)．我们得下列的值：

$$PT = \left|\frac{y}{y'}\right|, \quad PN = |yy'|,$$

$$MT = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2},$$

$$MN = |y|\sqrt{1+y'^2}.$$

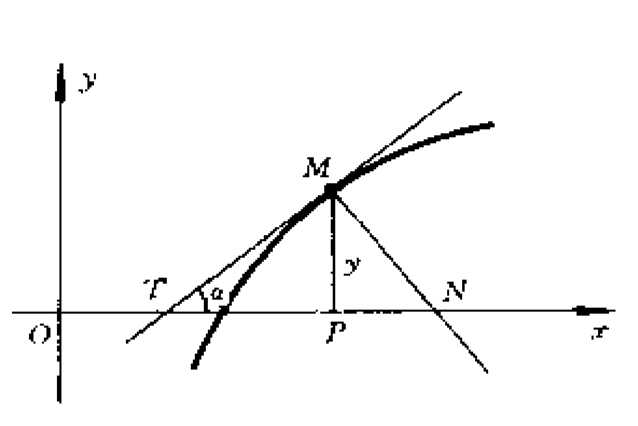
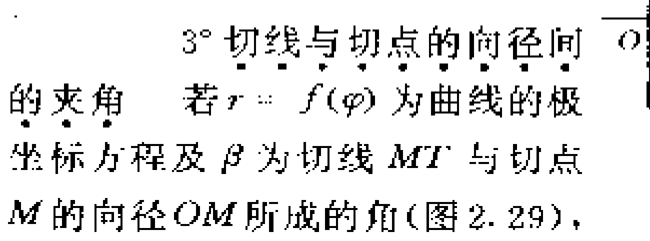


图 2.28



3° 切线与切点的向径间的夹角　若 $r=f(\varphi)$ 为曲线的极坐标方程及 β 为切线 MT 与切点 M 的向径 OM 所成的角(图 2.29)，则

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{r'}.$$

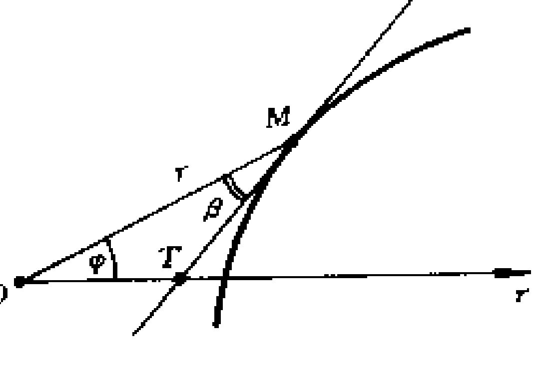


图 2.29

1055. 写出曲线 $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$ 上 $A(-1,0)$、$B(2,3)$、$C(3,0)$ 诸点处的切线和法线方程.

解　由于

$$y' = \sqrt[3]{3-x} - \frac{x+1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}},$$

所以，在 A 点的切线方程为

$$y-0 = y'|_{x=-1}(x+1), \text{即 } y = \sqrt[3]{4}(x+1);$$

法线方程为

$$y-0 = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x+1),$$

即　$$y = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1).$$

在 B 点的切线方程为

$$y-3 = y'|_{x=2}(x-2), \text{即 } y = 3;$$

法线方程为

$$x = 2.$$

在 C 点，由于 y' 为无穷，故切线方程为

$$x = 3;$$

法线方程为

$$y = 0.$$

1056. 在曲线

$$y = 2 + x - x^2$$

上的哪些点其切线(a) 平行于 Ox 轴；(б) 平行于第一象限角的平分线？

解 由于

$$y' = 1 - 2x,$$

所以，有

(a) 令 $y' = 0$，则 $x = \frac{1}{2}$，$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$，

故在点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ 处其切线平行于 Ox 轴；

(б) 令 $y' = 1$，则 $x = 0$，$y = 2$，故在点 $(0,2)$ 处其切线平行于第一象限角的平分线．

1057. 证明抛物线

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (a \neq 0, x_1 < x_2)$$

与 Ox 轴相交所成的两角 α 及 β

$$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$$ 彼此相等．

解 如图 2.30 所示，显然抛物线与 Ox 轴的交点为 $A(x_1, 0)$，$B(x_2, 0)$．由于 $y' = 2ax - a(x_1 + x_2)$，故在点 A、B 处切线的斜率分别为

$$k_A = y'|_{x=x_1} = 2ax_1 - a(x_1 + x_2)$$
$$= a(x_1 - x_2) = \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\pi - \beta). \qquad (1)$$

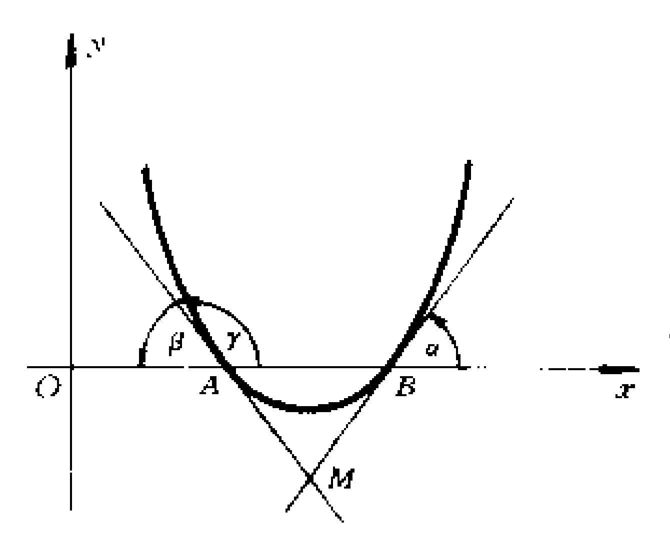


图 2.30

$$k_B = y'|_{x=x_2} = 2ax_2 - a(x_1 + x_2)$$
$$= a(x_2 - x_1) = \operatorname{tg}\alpha. \qquad (2)$$

由(2)式得

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = a(x_1 - x_2). \qquad (3)$$

由(1)式及(3)式证得

$$\alpha = \beta.$$

1058. 在曲线

$$y = 2\sin x \ (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$$

上求出"曲线的坡度"(即是 $|y'|$)大于 1 的区域.

解 由于 $y' = 2\cos x$,故要 $|y'| > 1$,只要

$$|\cos x| > \frac{1}{2},$$

也即

$$|x| < \frac{\pi}{3} \quad 及 \quad \frac{2\pi}{3} < |x| \leqslant \pi,$$

此即所求的区域.

1059. 函数 $y=x$ 及 $y_1=x+0.01\cdot\sin1000\pi x$ 二者相差不大于 0.01,则这些函数的导函数的差的最大值为何?作出对应的图形.

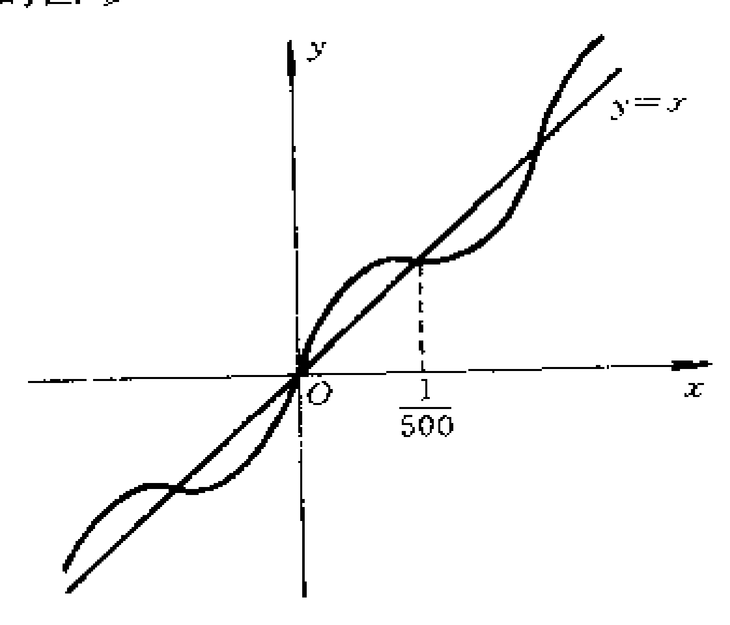


图 2.31

解 导函数差的最大值

$\max|y'-y_1'|=\max|10\pi\cdot\cos1000\pi x|=10\pi\approx 31.4.$

由此可见,两函数相差甚微时(图 2.31),其导函数却可相差很大.

如图 2.32 所示.

1060. 曲线 $y=\ln x$ 与 Ox 轴相交的角如何?

解 曲线 $y=\ln x$ 与 Ox 轴的交点为(1,0),设曲线与 Ox 轴的相交角为 α,则

$$\operatorname{tg}\alpha=y'\Big|_{x=1}=\frac{1}{x}\Big|_{x=1}=1,$$

故交角 α 为 45°.

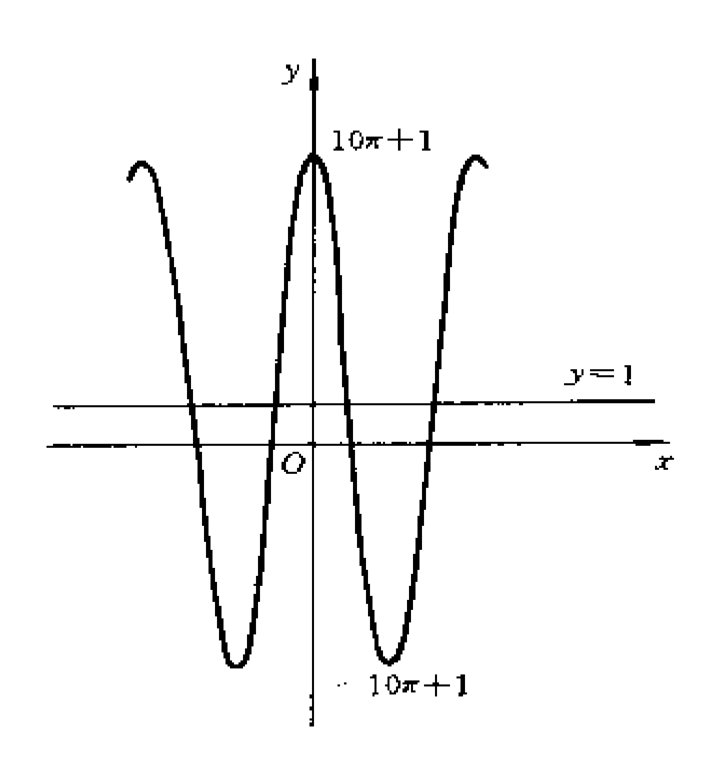


图 2.32

1061. 曲线 $y = x^2$ 及 $x = y^2$ 相交的角如何?

解 两曲线的交点为(0,0) 及(1,1). 由于导数为

$$y' = 2x \text{ 及 } y' = \frac{1}{2y},$$

故在(0,0) 点两曲线的交角显然为 90°.

在(1,1) 点两切线的斜率分别为

$$k_1 = 2 \text{ 及 } k_2 = \frac{1}{2},$$

故其交角 θ 的正切为

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4},$$

于是

$$\theta = \operatorname{arc\ tg} \frac{3}{4} \approx 37°.$$

$\theta > 89°$，相当于 $\mathrm{tg}\theta > \mathrm{tg}89° = 57.29$，即

$$n > 57.29.$$

1064. 求出曲线：(a) $y = \sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}$ 于点 $x = 0$ 处，

(б) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ 于点 $x = 1$ 处的左切线与右切线间的夹角．

解 (a) 函数的左、右导数分别为

$$y'_-(0) = \lim_{x\to -0} \frac{\sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to -0}\left(-\sqrt{\frac{e^{-a^2x^2} - 1}{-a^2x^2} \cdot a^2}\right)$$

$$= -|a|,$$

$$y'_+(0) = \lim_{x\to +0} \frac{\sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to +0} \sqrt{\frac{e^{-a^2x^2} - 1}{-a^2x^2} \cdot a^2} = |a|.$$

所以，于点 $x = 0$ 处左、右切线之间的夹角 θ 满足

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{2|a|}{|a|^2 - 1}，\text{即 } \theta = 2\mathrm{arc\ tg}\frac{1}{|a|}.$$

(б) 函数的左、右导数分别为

$$y'_-(1) = \lim_{x\to 1-0} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \arcsin 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1-0} \frac{-\arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1-0} \frac{\frac{1-x^2}{1+x^2}}{1 - x} = 1,$$

同理，$y'_+(1)=-1$. 因此，左、右切线的斜率互为负倒数，所以，夹角为 $90°$.

1065. 证明对数螺线 $r=ae^{m\varphi}$（a 及 m 为常数）的切线与切点的向径所成的角度为一常量.

证 设切线与切点的向径所成的角为 β，由于

$$r=ae^{m\varphi}, r'=ame^{m\varphi},$$

所以 $\operatorname{tg}\beta=\frac{r}{r'}=\frac{1}{m}$，它为一常数，故 β 为一常量.

1066. 求曲线 $y=ax^n$ 的次切线长，由此给出作这曲线的切线的方法.

解 设在任一点 $M(x,y)$ 的次切线长为 l_T，如图 2.33 中的 $|PT|$，则

$$l_T=\left|\frac{y}{\operatorname{tg}\alpha}\right|=\left|\frac{y}{y'}\right|=\left|\frac{ax^n}{nax^{n-1}}\right|=\left|\frac{x}{n}\right|.$$

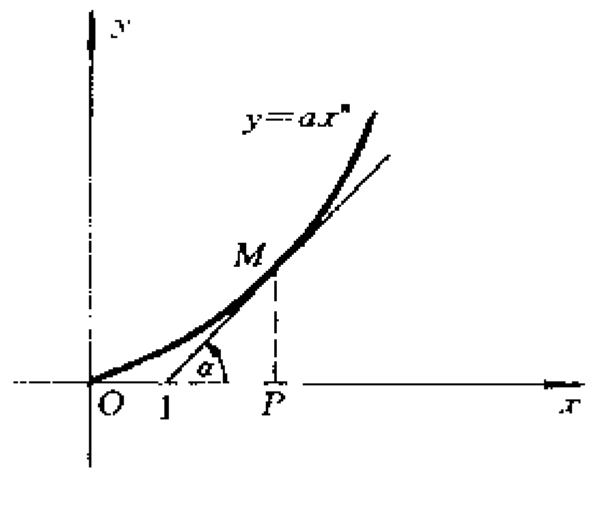


图 2.33

由此，该曲线的切线可以这样作：对于曲线 $y=ax^n$ 上任一点 $M(x,y)$，由此点向 Ox 轴作垂线，得交点 P. 再在 Ox 轴上取点 T，使 $|PT|=\frac{|x|}{n}$（当然，只是在 P 的一侧取点 T，若在此点 $yy'>0$，则在 P 点的左侧取 T；若在此点 $yy'<0$，则在 P 点的右侧取 T. 以后不再说明），然后联接 MT，则 MT 就是所求的切线.

1067. 证明抛物线 $y^2=2px$ 的(a) 次切线长等于切点的横坐标的两倍；(б) 次法线为一常量. 给出作抛物线的切线的方法.

证　(a) 次切线长为

$$l_T = |PT| = \left|\frac{y}{y'}\right| = \left|\frac{y}{\frac{p}{y}}\right|$$

$$= \left|\frac{y^2}{p}\right| = \left|\frac{2px}{p}\right| = 2|x|,$$

所以,次切线长为切点横坐标的两倍．

(б) 次法线长为 $l_N = |PN| = |yy'| = \left|y \cdot \frac{p}{y}\right| = |p|$,

所以,次法线长为一常量．

由此,抛物线的切线可以这样作:由曲线 $y^2 = 2px$ 上的任一点 $M(x,y)$ 向 Ox 轴作垂线,得交点 P. 由于 $yy' = p$,故当 $p > 0$($p < 0$) 时,在 Ox 轴上 P 点的左(右)侧取点 T,如图 2.34,使 $|PT| = 2|x|$,联结 MT,此即所求的切线．

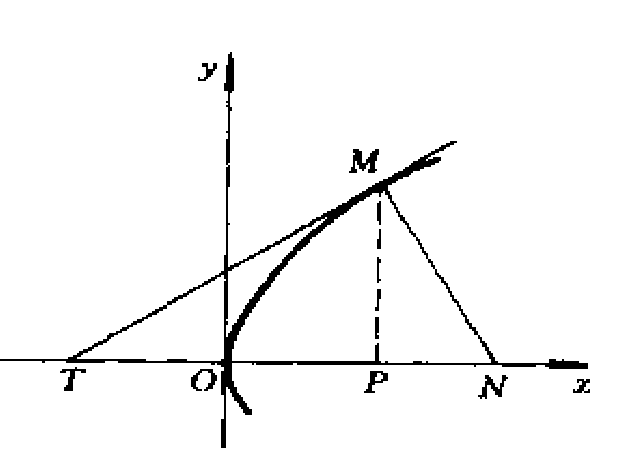


图 2.34

1068. 证明指数曲线 $y = a^x$($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 有定长的次切线．给出作指数曲线的切线的方法．

证　次切线长为

$$l_T = \left|\frac{y}{y'}\right| = \left|\frac{a^x}{a^x \ln a}\right| = \frac{1}{|\ln a|}.$$

从而 l_T 为常量．

由此,该曲线的切线可以这样作:对于曲线 $y = a^x$ 上任一点 $M(x,y)$ 向 Ox 轴作垂线,得交点 P. 由于当 a

>1 时 $yy'>0$，当 $0<a<1$ 时 $yy'<0$，故在 Ox 轴上点 P 的左侧（当 $a>1$ 时）或右侧（当 $0<a<1$ 时）取点 T，使 $|PT|=\frac{1}{|\ln a|}$，联接 MT，此即所求的切线（图 2.35）。

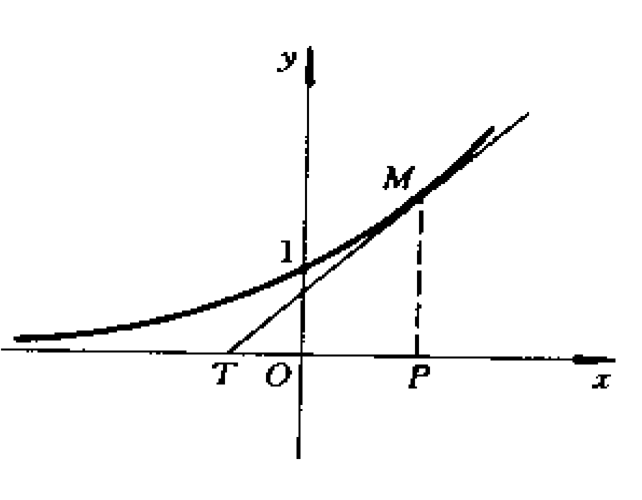


图 2.35

1069. 求悬链线

$$y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$$

上任一点 $M(x_0,y_0)$ 处的法线长．

解　法线长为

$$|MN|$$

$$=|y|\sqrt{1+y'^2}\Big|_{(x_0,y_0)}.$$

由于

$$y'=a\cdot\frac{1}{a}\operatorname{sh}\frac{x}{a}=\operatorname{sh}\frac{x}{a},$$

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}=\left|\operatorname{ch}\frac{x}{a}\right|$$

$$=\left|\frac{y}{a}\right|,$$

故

$$|MN|=|y_0|\cdot\left|\frac{y_0}{a}\right|=\frac{y_0^2}{|a|},$$

即

$$|MN|=\frac{y_0^2}{|a|}\quad(a\neq 0).$$

1070. 证明内摆线

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$$

的切线介于坐标轴间的部分的长为一常量.

证 由方程 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 求得导数 $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 对于曲线上任一点 $(x_0, y_0)(x_0 \neq 0)$ 处, 其切线方程为

$$y - y_0 = -\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(x - x_0),$$

它在两坐标轴上的截距分别为

$$l_x = x_0 + \sqrt[3]{x_0 y_0^2} \text{ 及 } l_y = y_0 + \sqrt[3]{x_0^2 y_0}.$$

于是, 切线在两坐标轴间的部分长为

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}.$$

由于,

$$\begin{aligned} l_x^2 + l_y^2 &= x_0^2 + y_0^2 + 3x_0 \sqrt[3]{x_0 y_0^2} + 3y_0 \sqrt[3]{x_0^2 y_0} \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 3\sqrt[3]{x_0^2 y_0^2}(\sqrt[3]{x_0^2} + \sqrt[3]{y_0^2}) \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 3\sqrt[3]{a^2 x_0^2 y_0^2} \\ &= (a^{\frac{2}{3}} - y_0^{\frac{2}{3}})^3 + y_0^2 + 3(a x_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2 - 3a^{\frac{4}{3}} y_0^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} y_0^{\frac{4}{3}} + 3(a x_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2 - 3a^{\frac{2}{3}} y_0^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - y_0^{\frac{2}{3}}) + 3(a x_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2 - 3(a x_0 y_0)^{\frac{2}{3}} + 3(a x_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2. \end{aligned}$$

故 $l = a$, 即内摆线

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$$

的切线介于坐标轴间部分的长为一常量.

1071. 若抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 Ox 轴相切,则系数 a,b,c 间的关系如何?

解 由方程 $y = ax^2 + bx + c$ 求得导数 $y' = 2ax + b$. 要抛物线与 Ox 轴相切,需 $y' = 0$,所以

$$2ax + b = 0,$$

即

$$x = -\frac{b}{2a}; \qquad (1)$$

另一方面,切点的横坐标满足:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

即

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}. \qquad (2)$$

比较(1)式及(2)式,得

$$b^2 - 4ac = 0,$$

此即所求的 a,b,c 间的关系.

1072. 在甚么条件下,三次抛物线

$$y = x^3 + px + q$$

与 Ox 轴相切?

解 由方程 $y = x^3 + px + q$ 求得 $y' = 3x^2 + p$. 要此曲线与 Ox 轴相切,必须满足

$$\begin{cases} 3x^2 + p = 0, & (1) \\ x^3 + px + q = 0. & (2) \end{cases}$$

由(2)式得 $x(x^2 + p) = -q$,两端平方,则

$$x^2(x^2 + p)^2 = q^2. \qquad (3)$$

以(1)式代入(3)式,得

$$-\frac{p}{3}\cdot\left(-\frac{p}{3}+p\right)^2=q^2,$$

即

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0,$$

此即所求的条件.

1073. 当参数 a 为何值时,抛物线 $y=ax^2$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切?

解 按题意,我们有

$$(ax^2)'=(\ln x)',$$

即

$$x^2=\frac{1}{2a}\ (a\neq 0),$$

从而 $$y=a\cdot\frac{1}{2a}=\frac{1}{2}.$$

同时,由于在切点相切,其纵坐标也必需相等,所以

$$\ln x=\frac{1}{2},\text{即 } x=\sqrt{e}.$$

最后得到

$$a=\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2e}.$$

1074. 证明曲线

$$y=f(x)\ [f(x)>0]$$

及 $$y=f(x)\sin ax,$$

其中 $f(x)$ 为可微分的函数,于公共点彼此相切.

证 解曲线方程

$$\begin{cases}y=f(x),\\ y=f(x)\sin ax,\end{cases}$$

得 $\sin ax = 1$，$x = \dfrac{(4k+1)\pi}{2a}$（$k$ 为整数），这就是两曲线交点的横坐标．两曲线在交点处切线的斜率分别为

$$k_1 = f'\left(\frac{4k+1}{2a}\pi\right),$$

$$k_2 = f'\left(\frac{4k+1}{2a}\pi\right)\sin\left(\frac{4k+1}{2}\pi\right) + a\cos\left(\frac{4k+1}{2}\pi\right)f\left(\frac{4k+1}{2a}\pi\right) = f'\left(\frac{4k+1}{2a}\pi\right).$$

从而

$$k_1 = k_2,$$

所以两曲线在公共点彼此相切．

1075. 证明双曲线族 $x^2 - y^2 = a$ 及 $xy = b$ 形成一正交网，就是说这两族中的曲线成直角相交．

证　设双曲线 $x^2 - y^2 = a$ 与双曲线 $xy = b$ 相交于点 $P(x,y)$，则在此点双曲线 $x^2 - y^2 = a$ 的切线的斜率 k_1 满足：$2x - 2yk_1 = 0$，所以，

$$k_1 = \frac{x}{y};$$

在同一点双曲线 $xy = b$ 的切线的斜率 k_2 满足：$y + xk_2 = 0$，所以，

$$k_2 = -\frac{y}{x};$$

由此得到

$$k_1k_2 = \frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{x}\right) = -1.$$

因此，两双曲线交成直角，故此两曲线族形成一正交网．

1076. 证明抛物线族

$$y^2 = 4a(a - x)\ (a > 0)$$

及 $$y^2 = 4b(b + x)\ (b > 0)$$

形成正交网．

证 设抛物线 $y^2 = 4a(a - x)$ 与抛物线 $y^2 = 4b(b + x)$ 相交于点 $P(x,y)$，则在此点 $y^2 = 4a(a - x)$ 的切线的斜率 k_1 满足：$2yk_1 = -4a$，所以，

$$k_1 = -\frac{2a}{y};$$

在同一点抛物线 $y^2 = 4b(b + x)$ 的切线的斜率 k_2 满足：$2yk_2 = 4b$，所以，

$$k_2 = \frac{2b}{y};$$

由此得到

$$k_1k_2 = -\frac{4ab}{y^2}. \tag{1}$$

但点 $P(x,y)$ 同时在这两条抛物线上，故

$$4a(a - x) = 4b(b + x).$$

于是，$x = a - b$，所以

$$y^2 = 4a(a - a + b) = 4ab. \tag{2}$$

以(2)式代入(1)式，得知在交点处，两切线的斜率满足

$$k_1k_2 = -1,$$

故此两切线直交．由此可知，该两抛物线族形成正交网．

1077. 写出曲线 $x = 2t - t^2$ 及 $y = 3t - t^3$ 上于(a)$t = 0$，(б)$t = 1$ 各点处的切线和法线的方程．

解 由于

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = 1.$$

切线方程为

$$y = x;$$

法线方程为

$$y = -x.$$

(б) 当 $t = 1$ 时,

$$x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}, \frac{dy}{dx} = 3.$$

切线方程为

$$y - \frac{1}{2} = 3\left(x - \frac{3}{2}\right), \text{即 } 3x - y - 4 = 0;$$

法线方程为

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right), \text{即 } x + 3y - 3 = 0;$$

(в) 当 $t = \infty$ 时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = -1.$$

$$\left(\text{意即:当 } t \to \infty \text{ 时}, x \to 0, y \to 0, \frac{dy}{dx} \to -1\right).$$

切线方程为

$$y = -x.$$

法线方程为

$$y = x.$$

1079. 写出摆线(旋轮线)

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$$

上任意一点 $t = t_0$ 处的切线方程. 给出摆线的切线的作法.

解 因为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_0}=\left.\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}\right|_{t=t_0}$$

$$=\operatorname{ctg}\left.\frac{t}{2}\right|_{t=t_0}=\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}.$$

于是，切线方程为

$$y-a(1-\cos t_0)=\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}\cdot[x-a(t_0-\sin t_0)],$$

化简得

$$y-2a=(x-at_0)\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}.$$

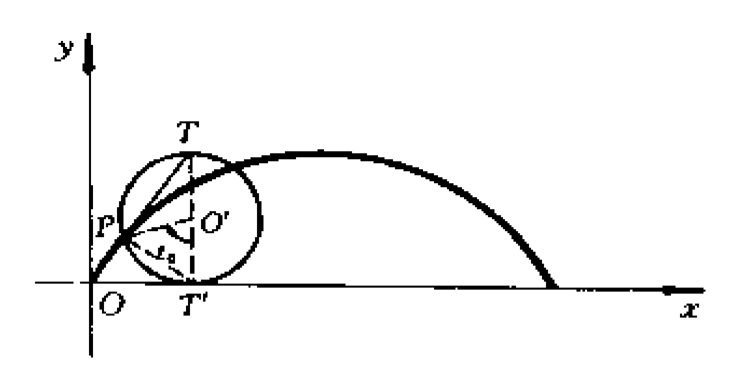


图 2.36

由此可知，切线通过点$(at_0,2a)$，其斜率为 $\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}$. 如图 2.36 中所示，$\angle T'O'P=t_0$，而

$$OT'=\overset{\frown}{T'P}=at_0,\ T'T=2a,$$

故 T 点的坐标为$(at_0,2a)$，它在切线上．其次，联接 PT 及 PT'，则 $PT'\perp PT$，

$$k_{PT}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\angle PT'T'\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t_0}{2}\right)$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}.$$

这样，PT 就通过点$(at_0,2a)$，且其斜率为 $\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}$，所以，

直线 PT 即为所求的切线．于是摆线的切线可以这样作：先联接切点与滚动的圆的接触点（即点 P），然后，过 P 作其垂直线，此即所求的切线．

1080. 证明曳物线

$$x = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right),$$
$$y = a\sin t \ (a > 0, 0 < t < \pi)$$

有一定长的切线段．

证 切线段的长 $= \left|\frac{y}{y'_x}\right|\sqrt{1 + y'^2_x}$，而

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\cos t}{a\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right)} = \frac{\sin t}{\cos t},$$

所以

$$\left|\frac{y}{y'_x}\right|\sqrt{1 + y'^2_x} = \left|\frac{a\sin t}{\frac{\sin t}{\cos t}}\right|\sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}$$
$$= |a||\cos t| \cdot \frac{1}{|\cos t|}$$
$$= |a|,$$

这是一个常量，故曳物线有定长的切线段．

写出下列曲线在指定点的切线与法线方程：

1081. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, M(6, 6.4)$.

解 由于

$$y' = -\frac{64x}{100y} = -\frac{16x}{25y},$$

从而点 M 处的导数

$$y'|_M = -\frac{16 \times 6}{25 \times 6.4} = -\frac{3}{5},$$

此即曲线在 M 点的切线的斜率.

所以,切线方程为

$$y - 6.4 = -\frac{3}{5}(x - 6), \text{即 } 3x + 5y - 50 = 0;$$

法线方程为

$$y - 6.4 = \frac{5}{3}(x - 6), \text{即 } 5x - 3y - 10.8 = 0.$$

1082. $xy + \ln y = 1, M(1,1).$

解 先求 y'. 由于

$$xy' + y + \frac{y'}{y} = 0,$$

从而

$$y' = -\frac{y^2}{x+y}, \quad y'\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = -\frac{1}{2}.$$

故切线方程为

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1), \text{即 } x + 2y - 3 = 0;$$

法线方程为

$$y - 1 = 2(x - 1), \text{即 } 2x - y - 1 = 0.$$

§4. 函数的微分

1° 函数的微分　若自变数为 x 的函数 $y = f(x)$ 之增量可表为下形

$$\Delta y = A(x)dx + o(dx),$$

其中 $dx = \Delta x$,则此增量的线性主部称为函数 y 的微分:

$$dy = A(x)dx$$

函数 $y = f(x)$ 的微分存在的必要且充分条件为存在有限的导函数 $y' = f'(x)$，且有

$$dy = y'dx. \tag{1}$$

若自变数 x 为另一自变数的函数，公式(1)于这种情形下仍然有效(一阶微分的不变性)．

2° **函数的微小增量的估计** 为了计算可微分的函数 $f(x)$ 的微小增量可利用公式

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x,$$

若 $f'(x) \neq 0$，当 $|\Delta x|$ 充分小时，它的相对误差可以任意地小．

特别情形，若计算自变数 x 的绝对误差等于 $|\Delta x|$，则函数 $y = f(x)$ 的绝对误差 $|\Delta y|$ 和相对误差 δy 用下列公式近似地表示出来：

$$|\Delta y| = |f'(x)\Delta x|$$

及

$$\delta y = |[\ln f(x)]'\Delta x| = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\Delta x\right|.$$

1083. 设：

(а)$\Delta x = 1$，(б)$\Delta x = 0.1$，(в)$\Delta x = 0.01$，

对于函数

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

求出：(1)$\Delta f(1)$，(2)$df(1)$，并比较它们．

解 $\Delta f(1) = f(1+\Delta x) - f(1)$

$= (\Delta x + 1)^3 - 2(1+\Delta x) + 1 - (1 - 2 + 1)$

$$= \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$$

$$df(1) = f'(1)\Delta x = (3x^2 - 2)\big|_{x=1} \cdot \Delta x = \Delta x,$$

将所求值列表如下：

		$\Delta f(1)$	$df(1)$
Δx		$\Delta x + 3(\Delta x)^3 + (\Delta x)^3$	Δx
(a)	$\Delta x = 1$	5	1
(б)	$\Delta x = 0.1$	0.131	0.1
(в)	$\Delta x = 0.01$	0.010301	0.01

从上表可以看出，当 Δx 值愈小时，$\Delta f(1)$ 与 $df(1)$ 之差就愈小.

1084. 运动方程是

$$x = 5t^2,$$

其中 t 以秒来度量，x 以公尺来度量. 设(a)$\Delta t = 1$ 秒，(б)$\Delta t = 0.1$ 秒，(в)$\Delta t = 0.001$ 秒，对 $t = 2$ 秒的时刻，求出路线的增量 Δx 及路线的微分 dx，并作比较.

解 $\Delta x = 5(2 + \Delta t)^2 - 5 \cdot 2^2 = 20\Delta t + 5(\Delta t)^2,$

$$dx = x_t'\big|_{t=2} \cdot \Delta t = 10t\big|_{t=2} \cdot \Delta t = 20\Delta t,$$

(a) 当 $\Delta t = 1$ 秒时，

$$\Delta x = 25 \text{ 公尺}, dx = 20 \text{ 公尺};$$

(б) 当 $\Delta t = 0.1$ 秒时，

$\Delta x = 2.05$ 公尺，$dx = 2$ 公尺；

(в) 当 $\Delta t = 0.001$ 秒时，

$\Delta x = 0.020005$ 公尺，$dx = 0.02$ 公尺．

由上可以看出，当 Δt 愈小时，$\Delta x - dx$ 就愈小．

求下列函数 y 的微分：

1085. $y = \frac{1}{x}$.

解 $y' = -\frac{1}{x^2}$，$dy = -\frac{1}{x^2}dx \ (x \neq 0)$.

1086. $y = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} \ (a \neq 0)$.

解 $y' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2 + x^2}$，

$$dy = \frac{dx}{a^2 + x^2}.$$

1087. $y = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right|$.

解 $y' = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right) = \frac{1}{x^2 - a^2}$，

$$dy = \frac{dx}{x^2 - a^2} \ (|x| \neq |a|).$$

1088. $y = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|$.

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$，$dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$.

1089. $y = \arcsin\frac{x}{a} \ (a \neq 0)$.

解 $y' = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$，

$$dy = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \ (|x| < |a|).$$

1090. (а) $d(xe^x)$; (б) $d(\sin x - x\cos x)$;

(в) $d\left(\frac{1}{x^3}\right)$; (г) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$;

(д) $d(\sqrt{a^2 + x^2})$; (е) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$;

(ж) $d\ln(1 - x^2)$; (з) $d\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)$;

(и) $d\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$

解 (а) $d(xe^x) = (xe^x)' dx = e^x(x + 1)dx$;

(б) $d(\sin x - x\cos x) = (\sin x - x\cos x)' dx$

$$= x\sin x dx;$$

(в) $d\left(\frac{1}{x^3}\right) = -\frac{3}{x^4}dx \ (x \neq 0)$;

(г) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x}dx$

$$= \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}dx \ (x > 0);$$

(д) $d(\sqrt{a^2 + x^2}) = \frac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$;

(е) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}}{1 - x^2}dx$

$$= \frac{dx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \ (|x| < 1);$$

(ж) $d\ln(1-x^2) = -\frac{2xdx}{1-x^2}$ $(|x|<1)$;

(з) $d\left(\arc\cos\frac{1}{|x|}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$\cdot\frac{|x|}{x}dx$

$= \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$;

(и) $d\left(\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)$

$= \left(\frac{\cos^3 x+2\sin^2 x\cos x}{2\cos^4 x}+\frac{1}{2\cos x}\right)dx$

$= \frac{dx}{\cos^3 x}$ $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k \text{ 为整数}\right)$.

设 u,v,w 为 x 的可微分的函数. 求函数 y 的微分, 设:

1091. $y = uvw$.

解 $dy = vwdu + uwdv + uvdw$.

1092. $y = \frac{u}{v^2}$.

解 $dy = \frac{v^2du-2uvdv}{v^4}$

$= \frac{vdu-2udv}{v^3}$ $(v\neq 0)$.

1093. $y = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$.

解 $dy = -\frac{1}{2(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot(2udu+2vdv)$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2x}\sin x}{x^2}$$

$$= \frac{x\cos x - \sin x}{2x^3},$$

显然，上述结果对于 $x < 0$ 也是正确的($x \neq 0$).

(в) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = \frac{\cos x dx}{-\sin x dx}$

$= -\operatorname{ctg} x$($x \neq k\pi$，k 为整数)；

(г) $\frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)} = \frac{d}{d(\operatorname{ctg} x)}\left(\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\right)$

$= -\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} = -\operatorname{tg}^2 x$

$\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right.$，$k$ 为整数$\left.\right)$；

(д) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx} = -1$

$(|x| < 1)$.

1097. 有半径为 $R = 100$ 厘米及圆心角 $\alpha = 60°$ 的扇形．若(a)其半径 R 增加 1 厘米；(б) 角 α 减小 $30'$，则扇形面积的变化若干?求出精确的和近似的解．

解 扇形面积 $A = \frac{1}{2}R^2\alpha$，其增量

$$\Delta A = \frac{\alpha}{2}[(R+\Delta R)^2 - R^2]$$

$$= \alpha R\Delta R + \frac{1}{2}\alpha(\Delta R)^2,$$

或

$$\Delta A = \frac{1}{2}R^2\Delta\alpha.$$

扇形面积的微分

$$dA = R\alpha\, dR,$$

或

$$dA = \frac{1}{2}R^2 d\alpha .$$

增量是精确的解，微分是近似的解.

(a) 当 $R = 100$，$\alpha = \frac{\pi}{3}$，$\Delta R = 1$ 时，

$$\Delta A = \frac{\pi}{6}(200 + 1) = 105.2 \text{ 平方厘米},$$

$$dA = 100 \cdot \frac{\pi}{3} = 104.7 \text{ 平方厘米(增加)}.$$

(6) 当 $\Delta\alpha = -\frac{\pi}{360}$ 时，

$$\Delta A = \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{360}\right) = -43.6 \text{ 平方厘米},$$

$$dA = \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{360}\right)$$
$$= -43.6 \text{ 平方厘米(减少)}.$$

1098. 单摆振动的周期(以秒计算)按下式确定：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中 l 为摆长以厘米计，$g = 981$ 厘米 / 每秒^2 为重力加速度.

为了使周期 T 增大 0.05 秒，对摆长 $l = 20$ 厘米的长度需要作多少修改？

解 周期 T 对摆长 l 的微分

$$dT = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{l}} dl = \frac{\pi dl}{\sqrt{lg}}.$$

将 $dT = 0.05$, $g = 981$, $l = 20$ 代入上式，即得

$$dl = \frac{0.05 \times \sqrt{981 \times 20}}{3.1416} \approx 2.23,$$

即摆长增加约 2.23 厘米.

利用函数之微分代替函数的增量，求下列各式之近似值：

1099. $\sqrt[3]{1.02}$.

解 设 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.02$, 则

$$f'(x_0) = \left.\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right|_{x=1} = \frac{1}{3},$$

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = 0.0066.$$

于是

$$\sqrt[3]{1.02} = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0)$$

$$= 1 + 0.0066,$$

即

$$\sqrt[3]{1.02} \approx 1.007.$$

1100. $\sin 29°$.

解 设 $f(x)=\sin x,\ x_0=\frac{\pi}{6},\Delta x=-\frac{\pi}{180}$,则

$$\sin 29° \approx \sin\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{6}=0.4849.$$

1101. $\cos 151°$.

解 设 $f(x)=\cos x,\ x_0=\frac{5\pi}{6},\Delta x=\frac{\pi}{180}$,则

$$\cos 151° \approx \cos\frac{5\pi}{6}-\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180}=-0.8748.$$

1102. $\mathrm{arc\ tg}1.05$.

解 设 $f(x)=\mathrm{arctg}x,\ x_0=1,\Delta x=0.05$,则

$$\begin{aligned}\mathrm{arctg}1.05 &\approx \mathrm{arc\ tg}1+0.05\cdot\frac{1}{2}\\ &=0.8104(\text{弪})\doteq 46°26'.\end{aligned}$$

1103. $\lg 11$.

解 $\lg 11=\lg 10+\lg 1.1=1+\lg 1.1$.

设 $f(x)=\lg x,\ x_0=1,\Delta x=0.1$,则

$$\lg 1.1\approx \lg 1+\frac{0.1}{\ln 10}\doteq\frac{0.1}{2.3026}\doteq 0.0434.$$

于是

$$\lg 11\approx 1.0434.$$

1104. 证明近似公式：

$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}(a>0),$$

其中$|x|\ll a$（正数A和B间的关系式$A\ll B$表示A与B相比较时，A为高阶无穷小）.

利用这个公式近似地计算：

(a) $\sqrt{5}$； (б) $\sqrt{34}$； (в) $\sqrt{120}$

并与表中的数值比较.

证 设$f(y)=\sqrt{y}$，$y_0=a^2$，$\Delta y=x$，则

$$\sqrt{y_0+\Delta y}\approx\sqrt{y_0}+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}\Delta y$$

(当$|\Delta y|\ll\sqrt{y_0}$时).

于是，

$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a},\text{(当}|x|\ll a\text{时)}$$

(a) $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1}\approx 2+\frac{1}{4}=2.25$，

查表：$\sqrt{5}=2.24$；

(б) $\sqrt{34}=\sqrt{6^2-2}\approx 6-\frac{2}{2.6}=5.833$，

查表：$\sqrt{34}=5.831$；

(в) $\sqrt{120}=\sqrt{11^2-1}\approx 11-\frac{1}{2.11}=10.9546$，

查表：$\sqrt{120}=10.9545$.

1105. 证明近似公式：

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}}(a>0).$$

其中 $|x|\ll a$. 利用此公式近似地计算：

(а) $\sqrt[3]{9}$； (б) $\sqrt[4]{80}$； (в) $\sqrt[7]{100}$；

(г) $\sqrt[10]{1000}$.

证 设 $f(y)=\sqrt[n]{y}$，$y_0=a^n$，$\Delta y=x$，则

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx\sqrt[n]{a^n}+\frac{x}{n\sqrt[n]{(a^n)^{n-1}}}$$

$$=a+\frac{x}{na^{n-1}}(当\ |x|\ll a\ 时).$$

(а) $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{2^3+1}\approx 2+\frac{1}{3.2^2}=2.083$，

查表：$\sqrt[3]{9}=2.080$；

(б) $\sqrt[4]{80}=\sqrt[4]{3^4-1}\approx 3-\frac{1}{4.3^3}=2.9907$，

查表：$\sqrt[4]{80}=2.9905$；

(в) $\sqrt[7]{100}=\sqrt[7]{2^7-28}\approx 2-\frac{28}{7.2^6}=1.938$，

查表：$\sqrt[7]{100}=1.931$；

(г) $\sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{2^{10}-24}\approx 2-\frac{24}{10\cdot 2^9}=1.9953$，

查表：$\sqrt[10]{1000}=1.9953$.

1106. 正方形的边 $x=2.4$ 米 ± 0.05 米．由此计算所得正方

形的面积的相对误差和绝对误差如何?

解 正方形的面积 $A = x^2$. 于是,面积的相对误差为

$$\delta_A = \left|\frac{\Delta A}{A}\right| = \left|\frac{2x\Delta x}{x^2}\right| = 2\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$$

$$= 2 \cdot \frac{0.05}{2.4} = 4.2\%;$$

而绝对误差为

$$|\Delta A| = |2.45^2 - 2.4^2| = 0.24 \text{ 平方米}.$$

1107. 为了计算出球的体积准确到 1%,问度量球半径 R 时所允许发生的相对误差如何?

解 球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$,从而

$$dV = \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 dR = V\,\frac{3dR}{R},$$

即体积的相对误差是半径的相对误差的 3 倍:

$$\left|\frac{dV}{V}\right| = 3\left|\frac{dR}{R}\right|.$$

因而,半径 R 允许发生的相对误差为

$$\delta_R = \frac{1}{3}\delta_V \leqslant \frac{1}{3} \cdot 0.01 = 0.33\%.$$

1108. 借助于单摆的振动利用公式 $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$(其中 l 为摆长,T 为摆振动的全周期)以求重力加速度. 当测量(a) 摆长 l,(б) 周期 T 时的相对误差 δ 影响于值 g 几何?

解 (a)$\delta_g = \left|\frac{dg}{g}\right| = \left|\frac{dl}{l}\right|$,于是

$$\delta_g = \delta_l,$$

即 g 的相对误差等于摆长的相对误差.

(6) $\delta_g = \left|\frac{-8\pi^2 l \cdot T^2 dT}{T^3 \cdot 4\pi^2 l}\right| - 2\left|\frac{dT}{T}\right|$,于是

$$\delta_g = 2\delta_T,$$

即 g 的相对误差是周期的相对误差的 2 倍.

1109. 求数 $x(x > 0)$ 的常用对数的绝对误差,设此数的相对误差等于 δ.

解 设 $f(x) = \ln x$,若数 δ 很小,则有

$$\ln(1 + \delta) \approx \delta.$$

因而,所要求的绝对误差

$$|\lg(x + \Delta x) - \lg x| = \left|\lg\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right|$$

$$= |\lg(1 + \delta)| = \frac{1}{\ln 10}\ln(1 + \delta) \approx 0.43\delta.$$

1110. 证明:根据正切对数表所求得的角度比用具有同样多位小数的正弦对数表求得的角度更为精确.

证 正切对数函数的微分

$$d(\lg \operatorname{tg}\varphi) = \frac{d\varphi}{\ln 10 \cdot \operatorname{tg}\varphi\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{d\varphi}{\ln 10 \cdot \sin\varphi\cos\varphi},$$

于是

$$|d\varphi| = \ln 10 \cdot |\sin\varphi| \cdot |\cos\varphi| \cdot |d(\lg \operatorname{tg}\varphi)|; \qquad (1)$$

而正弦对数函数的微分

$$d(\lg \sin\varphi) = \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sin\varphi \ln 10},$$

于是

$$|d\varphi| = \ln 10 \cdot |\sin\varphi| \cdot \left|\frac{1}{\cos\varphi}\right| \cdot |d(\lg \sin\varphi)|. \tag{2}$$

比较(1)式及(2)式的右端，由于假设确定 $\lg \sin\varphi$ 与 $\lg \mathrm{tg}\varphi$ 时，具有同样的误差，而 $\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right| \geqslant 1 \geqslant |\cos\varphi|$，故由(2)式所确定的 $|d\varphi|$ 不比(1)式的 $|d\varphi|$ 小．这就证明了求角度时用正切对数表更为精确．

§5. 高阶的导函数和微分

1° **基本定义** 函数 $y = f(x)$ 的高阶导函数由下列关系式顺次地定义出来(假设对应的运算都有意义!)：

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \quad (n = 2,3,\cdots).$$

函数 $y = f(x)$ 的高阶微分是根据下列公式顺次定义的：

$$d^n y = d(d^{n-1}y) \quad (n = 2,3,\cdots),$$

其中采取 $d^1 y = dy = y' dx$.

若 x 为自变数，则应有：

$$d^2 x = d^3 x = \cdots = 0.$$

在这种情形下，下列公式正确

$$= \frac{x(3 + 2x^2)}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1112. $y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

解 $$y' = \frac{\sqrt{1 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}}{1 - x^2}$$

$$= \frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y'' = \frac{3}{2} \cdot 2x \cdot (1 - x^2)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3x}{(1 - x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$(|x| < 1)$.

1113. $y = e^{-x^2}$.

解 $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$.

1114. $y = \operatorname{tg} x$.

解 $$y' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\left(x \neq \frac{2k + 1}{2}\pi, k \text{ 为整数}\right).$$

1115. $y = (1 + x^2)\operatorname{arc\,tg} x$.

解 $y' = 1 + 2x\operatorname{arctg} x$,

$$y'' = 2\operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1 + x^2}.$$

1116. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

解 $$y' = \frac{1}{1 - x^2} + \frac{x\arcsin x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y'' = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$+\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\right)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+3x^2\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{3x}{(1-x^2)}+\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$(|x|<1).$$

1117. $y = x\ln x$.

解 $y' = 1+\ln x$，$y'' = \frac{1}{x}(x>0)$.

1118. $y = \ln f(x)$.

解 $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$，

$$y'' = \frac{f(x)f''(x) - f'^2(x)}{f^2(x)}(f(x)>0).$$

1119. $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.

解 $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$

$$+ x\cdot\frac{1}{x}[\cos(\ln x) - \sin(\ln x)]$$

$$= 2\cos(\ln x),$$

$$y'' = -\frac{2\sin(\ln x)}{x}(x>0).$$

1120. 设 $y = e^{\sin x}\cos(\sin x)$，求 $y(0)$，$y'(0)$ 及 $y''(0)$.

解 $y(0) = 1$. 又

$$y' = e^{\sin x}[\cos x\cos(\sin x)$$

$$- \cos x \sin(\sin x)].$$

于是，

$$y'(0) = e^0[1 - 0] = 1.$$

而

$$y'' = e^{\sin x}[\cos^2 x \cos(\sin x) - \cos^2 x \sin(\sin x)$$

$$- \sin x \cos(\sin x) - \cos^2 x \sin(\sin x)$$

$$+ \sin x \sin(\sin x) - \cos^2 x \cos(\sin x)]$$

$$= e^{\sin x}\{- 2\cos^2 x \sin(\sin x)$$

$$+ \sin x[\sin(\sin x) - \cos(\sin x)]\},$$

于是，

$$y''(0) = e^0\{0 + 0\} = 0.$$

设 $u = \varphi(x)$ 及 $v = \psi(x)$ 为可微分二次的函数．求 y''，设：

1121. $y = u^2$.

解 $y' = 2uu'$,

$$y'' = 2u'^2 + 2uu'' = 2(u'^2 + uu'').$$

1122. $y = \ln \frac{u}{v}$.

解 $y' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$,

$$y'' = \frac{uu'' - u'^2}{u^2} - \frac{vv'' - v'^2}{v^2}(uv > 0).$$

1123. $y=\sqrt{u^2+v^2}$.

解 $y'=\dfrac{uu'+vv'}{\sqrt{u^2+v^2}}$,

$$y''=\frac{(uu''+u'^2+vv''+v'^2)\sqrt{u^2+v^2}-\dfrac{(uu'+vv')^2}{\sqrt{u^2+v^2}}}{u^2+v^2}$$

$$=\frac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-v'u)^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$(u^2+v^2>0)$.

1124. $y=u^v(u>0)$.

解 $y'=u^v\left[v'\ln u+\dfrac{vu'}{u}\right]$,

$$y''=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right)^2$$

$$+u^v\left[v''\ln u+\frac{u'v'}{u}\right.$$

$$\left.+\frac{(u'v'+vu'')u-vu'^2}{u^2}\right]$$

$$=u^v\left[\left(v'\ln u+\frac{u'}{u}v\right)^2+v''\ln u\right.$$

$$\left.+\frac{2u'v'}{u}+\frac{v}{u^2}(uu''-u'^2)\right].$$

设 $f(x)$ 为可微分三次的函数．求 y'' 及 y''',设:

1125. $y=f(x^2)$.

解 $y'=2xf'(x^2)$,

$y''=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$,

$$y''' = 4xf''(x^2) + 8xf''(x^2) + 8x^3f'''(x^2)$$
$$= 12xf''(x^2) + 8x^3f'''(x^2).$$

1126. $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解 $$y' = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right),$$
$$y'' = \frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right),$$
$$y''' = -\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{4}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= -\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0).$$

1127. $y = f(e^x)$.

解 $$y' = e^xf'(e^x),$$
$$y'' = e^{2x}f''(e^x) + e^xf'(e^x),$$
$$y''' = e^{3x}f'''(e^x) + 3e^{2x}f''(e^x) + e^xf'(e^x).$$

1128. $y = f(\ln x)$.

解 $$y' = \frac{1}{x}f'(\ln x),$$
$$y'' = -\frac{1}{x^2}f'(\ln x) + \frac{1}{x^2}f''(\ln x)$$
$$= \frac{1}{x^2}[f''(\ln x) - f'(\ln x)],$$

$$y''' = -\frac{2}{x^3}[f''(\ln x) - f'(\ln x)]$$

$$+ \frac{1}{x^3}[f'''(\ln x) - f''(\ln x)]$$

$$= \frac{1}{x^3}[f'''(\ln x) - 3f''(\ln x) + 2f'(\ln x)]$$

$(x > 0)$.

1129. $y = f[\varphi(x)]$，其中 $\varphi(x)$ 是可多次微分的函数.

解 $y' = \varphi'(x)f'[\varphi(x)]$，

$$y'' = \varphi'^2(x)f''[\varphi(x)] + \varphi''(x)f'[\varphi(x)],$$

$$y''' = \varphi'^3(x)f'''[\varphi(x)]$$

$$+ 3\varphi'(x)\varphi''(x)f''[\varphi(x)]$$

$$+ \varphi'''(x)f'[\varphi(x)].$$

1130. 对于以下二种情形：(a) x 为自变量，(б) x 为中间变量，求函数 $y = e^x$ 的 d^2y.

解 (a) $dy = e^x dx$, $d^2y = e^x dx^2$；

(б) $dy = e^x dx$, $d^2y = e^x d^2x + e^x dx^2$.

若 x 为自变数，求 d^2y，设：

1131. $y = \sqrt{1 + x^2}$.

解 $dy = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}dx$,

$$y'' = \left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)' = \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

于是，

$$d^2y=\frac{dx^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1132. $y=\frac{\ln x}{x}$.

解 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}, y''=\frac{2\ln x-3}{x^3}$,

于是，

$$d^2y=\frac{2\ln x-3}{x^3}dx^2 \quad (x>0).$$

1133. $y=x^x$.

解 $y'=x^x(1+\ln x)$,

$$y''=x^x\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right],$$

于是，

$$d^2y=x^x\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right]dx^2 (x>0).$$

令 u 及 v 为变数 x 的可微分两次的函数，求 d^2y，设：

1134. $y=uv$.

解 $dy=udv+vdu$,

$$d^2y=dudv+ud^2v+dvdu+vd^2u$$

$$=ud^2v+2dudv+vd^2u.$$

1135$^+$. $y=\frac{u}{v}$.

解 $dy=\frac{vdu-udv}{v^2}$,

$$d^2y=\frac{v^2(dvdu+vd^2u-dudv-ud^2v)-2vdv(vdu-udv)}{v^4}$$

$$=\frac{v(vd^2u-ud^2v)-2dv(vdu-udv)}{v^3}(v\neq 0)$$

1136. $y=u^m v^n$(m 及 n 为常数).

解 $dy=mu^{m-1}v^n du+nu^m v^{n-1}dv$,

$$d^2y=m(m-1)u^{m-2}v^n du^2$$

$$+mu^{m-1}(v^n d^2u+nv^{n-1}dudv)$$

$$+mnu^{m-1}v^{n-1}dudv$$

$$+nu^m(n-1)v^{n-2}dv^2+nu^m v^{n-1}d^2v$$

$$=u^{m-2}v^{n-2}\{[m(m-1)v^2du^2$$

$$+2mnuvdudv+n(n-1)u^2dv^2]$$

$$+uv(mvd^2u+nud^2v)\}.$$

1137. $y=a^u(a>0)$.

解 $dy=a^u\ln adu$,

$$d^2y=a^u\ln^2a\cdot du^2+a^u\ln a\cdot d^2u$$

$$=a^u\ln a(\ln a\cdot du^2+d^2u)(a>0).$$

1138. $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$.

解 $dy=\dfrac{udu+vdv}{u^2+v^2}$,

$$d^2y=\frac{(u^2+v^2)(du^2+ud^2u+dv^2+vd^2v)-2(udu+vdv)^2}{(u^2+v^2)^2}$$

$$=\frac{(v^2-u^2)du^2-4uvdudv+(u^2-v^2)dv^2+(u^2+v^2)(ud^2u+vd^2v)}{(u^2+v^2)^2}$$

$$(u^2+v^2>0).$$

1139. $y=\operatorname{arctg}\frac{u}{v}$.

解 $dy=\frac{vdu-udv}{u^2+v^2}$,

$$d^2y=\frac{(u^2+v^2)(vd^2u-ud^2v)-2(udu+vdv)(vdu-udv)}{(u^2+v^2)^2}$$

$$=\frac{(u^2+v^2)(vd^2u-ud^2v)+2uv(dv^2-du^2)+2(u^2-v^2)dudv}{(u^2+v^2)^2}$$

$$(v\neq 0).$$

求以参数给出的函数 $y=y(x)$ 的导函数 y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^2},设:

1140. $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$.

解 $y'_x=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{3-3t^2}{2-2t}=\dfrac{3}{2}(t+1)$,

$$y''_{x^2}=\frac{\frac{dy'_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{3}{2}}{2-2t}=\frac{3}{4(1-t)},$$

$$y'''_{x^3}=\frac{\frac{dy''_{x^2}}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{3}{4(1-t)^2}}{2-2t}$$

$$=\frac{3}{8(1-t)^3}(t\neq 1).$$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+t\right),$$

$$y''_{x^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}}{e^t(\cos t - \sin t)}$$

$$= \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{4}+t\right)},$$

$$y'''_{x^3} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\left[-\cos^{-3}\left(\frac{\pi}{4}+t\right)+3\cos^{-4}\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\right]}{e^t(\cos t - \sin t)}$$

$$= \frac{e^{-2t}(2\sin t + \cos t)}{\sqrt{2}\cos^5\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}\left(t \neq \frac{\pi}{4}+k\pi, k \text{ 为整数}\right).$$

1144. $x = f'(t), y = tf'(t) - f(t)$.

解 $y'_x = \dfrac{tf''(t)}{f''(t)} = t,$

$$y''_{x^2} = \frac{1}{f''(t)},$$

$$y'''_{x^3} = -\frac{\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^2}}{f''(t)} = -\frac{f(t)}{[f''(t)]^3}$$

$$(f''(t) \neq 0).$$

1145. 设函数 $y = f(x)$ 是可微分若干次的．求反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的导函数 $x', x'', x''', x^{(4)}$（设这些导函数都存在）.

解 $x' = \dfrac{1}{y'},$

$$x'' = -\frac{1}{y'^{2}}\frac{dy'}{dy}$$

$$= -\frac{1}{y'^{2}}\frac{dy'}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = -\frac{y''}{y'^{3}},$$

$$x''' = -\frac{y'''\cdot\frac{1}{y'}y'^{3} - 3y'^{2}\cdot y''\cdot\frac{1}{y'}\cdot y''}{y'^{6}}$$

$$= -\frac{y'y''' - 3y''^{2}}{y'^{5}},$$

$$x^{(4)} = -\frac{y'^{5}\left(\frac{y''}{y'}y''' + y^{(4)} - 6y''y'''\cdot\frac{1}{y'}\right)}{y'^{10}}$$

$$\frac{-5y'^{4}\cdot y''\cdot\frac{1}{y'}(y'y''' - 3y''^{2})}{y'^{10}}$$

$$= -\frac{y'^{2}y^{(4)} - 10y'y''y''' + 15y''^{3}}{y'^{7}}(y' \neq 0).$$

求由下列隐函数给出的 $y = y(x)$ 的 y'_x, y''_{x^2} 及 y'''_{x^3}:

1146. $x^2 + y^2 = 25$. 在点 $M(3,4)$ 的 y', y'' 及 y''' 等于甚么?

解 $y' = -\frac{x}{y}$,

$$y'' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{v + \frac{x^2}{y}}{y^2}$$

$$= -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{25}{y^3},$$

$$y''' = \frac{75y'}{y^4} = -\frac{75x}{y^5},$$

在 $M(3,4)$ 点,得

$$y' = -\frac{3}{4}, y'' = -\frac{25}{64}, y''' = -\frac{225}{1024}.$$

1147. $y^2 = 2px$.

解 $y' = \frac{p}{y}$, $y'' = -\frac{p}{y^2}y' = -\frac{p^2}{y^3}$,

$$y''' = \frac{3p^2}{y^4}y' = \frac{3p^3}{y^5}(y \neq 0).$$

1148. $x^2 - xy + y^2 = 1$.

解 对 x 微分，得

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0, \tag{1}$$

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}. \tag{2}$$

将(1)式两端再对 x 微分，得

$$2 - 2y' - xy'' + 2y'^2 + 2yy'' = 0, \tag{3}$$

将(2)式所得 y' 代入(3)式，得

$$y'' = \frac{6}{(x - 2y)^3}. \tag{4}$$

将(3)式两端对 x 微分，得

$$-3y'' - xy''' + 6y'y'' + 2yy''' = 0, \tag{5}$$

将(2)式及(4)式代入(5)式，得

$$y''' = \frac{54x}{(x - 2y)^5}(x \neq 2y).$$

求 y'_x 及 y''_{x^2}，设：

1149. $y^2 + 2\ln y = x^4$.

解 对 x 微分，得

$$2yy' + \frac{2y'}{y} = 4x^3, \tag{1}$$

再对 x 微分，得

$$2y'^2 + 2yy'' + \frac{2y''}{y} - \frac{2y'^2}{y^2} = 12x^2. \tag{2}$$

由(1)式及(2)式得

$$y' = \frac{2x^3 y}{1 + y^2},$$

$$y'' = \frac{2x^2 y}{(1 + y^2)^3}[3(1 + y^2)^2 + 2x^4(1 - y^2)].$$

1150. $\sqrt{x^2 + y^2} = ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} (a > 0)$.

解 取对数得

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) = \ln a + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

对 x 微分，得

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2},$$

于是

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

将上式对 x 微分，得

$$y'' = \frac{(1+y')(x-y) - (1-y')(x+y)}{(x - y)^2}$$

$$= \frac{2xy' - 2y}{(x - y)^2} = \frac{2x \cdot \frac{x + y}{x - y} - 2y}{(x - y)^2}$$

$$= \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3} \quad (x \neq y,\ x \neq 0).$$

1151. 设函数 $f(x)$ 当 $x \leqslant x_0$ 时有定义且可微分两次. 应当如何选择系数 a, b 及 c, 使函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), 若\ x \leqslant x_0, \\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, 若\ x > x_0 \end{cases}$$

是可微分两次的函数?

解 按题设 $F'(x)$ 存在, 所以 $F(x)$ 在点 x_0 连续, 即

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} = F(x_0),$$

也即

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} [a(x - x^0)^2 + b(x - x_0) + c] = f(x_0).$$

于是, $c = f(x_0)$. 其次, 由 $F'(x_0 - 0) = F'(x_0 + 0)$ 得

$$f'(x_0) = [2a(x - x_0) + b]\big|_{x=x_0} = b,$$

再由 $F''(x_0 - 0) = F''(x_0 + 0)$ 得

$$f''(x_0) = 2a,$$

于是

$$a = \frac{1}{2} f''(x_0).$$

1152. 点作直线运动的规律为

$$s = 10 + 20t - 5t^2.$$

求其运动的速度和加速度．在 $t=2$ 的时刻，速度与加速度等于甚么？

解 速度

$$v=\frac{ds}{dt}=20-10t, v\Big|_{t=2}=0;$$

而加速度

$$j=\frac{d^2s}{dt^2}=-10,\ j\Big|_{t=2}=-10.$$

1153. 点 $M(x,y)$ 沿圆周 $x^2+y^2=a^2$ 均匀地运动，每 T 秒走完一圈．求点 M 在 Ox 轴上的射影之速度 v 及加速度 j，设 $t=0$ 时点的位置为 $M_0(a,0)$.

解 设 M 点的坐标为 (x,y)，由于 $\angle M_0OM=\frac{2\pi}{T}t$，从而

$$x=a\cos\frac{2\pi}{T}t.$$

于是速度和加速度分别为

$$v=\frac{dx}{dt}=-\frac{2\pi a}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t,$$

$$j=\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{4\pi^2a}{T^2}\cos\frac{2\pi}{T}t.$$

1154. 质点 $M(x,y)$ 在铅直平面 Oxy 内以速度 v_0 沿与水平面成 α 角的方向抛去．建立（空气的阻力略去不计）运动的方程并计算速度 v 加速度 j 的大小及运动的轨道．最大的高度和射程等于多少？

解　若不考虑空气的阻力，则有

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha, \\ y = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

此即运动方程．化为直角坐标方程，得

$$y = x\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

即轨道为一抛物线．速度

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (v_0\sin\alpha - gt)^2}$$

$$= \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0gt\sin\alpha},$$

而加速度

$$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{0 + (-g)^2} = g.$$

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\alpha - \frac{gx}{v_0^2\cos^2\alpha}.$$

在最大高度处，$\frac{dy}{dx} = 0$. 此时

$$x = \frac{v_0^2\cos^2\alpha\mathrm{tg}\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

于是，最大高度为

$$H_{max} = \frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot\frac{v_0^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{g^2} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

上式也可从$\frac{dy}{dt}=0$,解出$t=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$,再以$t$值代入$y$的表达式而得到．在最大射程处有:$y=0$. 于是

$$x\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = 0,$$

解得

$$x = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}.$$

从而,最大射程为$\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$.

1155. 点运动的方程为

$x = 4\sin\omega t - 3\cos\omega t$, $y = 3\sin\omega t + 4\cos\omega t$,($\omega$为常数). 求运动的轨道,速度与加速度的大小．

解　由于

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16\sin^2\omega t + 9\cos^2\omega t \\ &\quad - 24\sin\omega t\cos\omega t + 9\sin^2\omega t \\ &\quad + 16\cos^2\omega t + 24\sin\omega t\cos\omega t \\ &= 25(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) = 25. \end{aligned}$$

所以,运动的轨道为一以原点为中心,5 为半径的圆．

其次，速度与加速度的大小分别为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(4\omega\cos\omega t+3\omega\sin\omega t)^2+(3\omega\cos\omega t-4\omega\sin\omega t)^2}$$

$$=5|\omega|,$$

$$j=\sqrt{j_x^2+j_y^2}=\sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(-4\omega^2\sin\omega t+3\omega^2\cos\omega t)^2+(-4\omega^2\cos\omega t-3\omega^2\sin\omega t)^2}$$

$$=5\omega^2.$$

求下列指定的阶的导函数：

1156. $y=x(2x-1)^2(x+3)^3$；求 $y^{(6)}$ 及 $y^{(7)}$.

解 y 是 x 的多项式，最高次数为 6 次，因而

$$y^{(6)}=1\cdot2^2\cdot1^3\cdot6!=4\cdot6!=2880,$$

$$y^{(7)}=0.$$

1157. $y=\frac{a}{x^m}$；求 y'''.

解 $y'=-amx^{-m-1},$

$$y''=am(m+1)x^{-m-2},$$

$$y'''=-am(m+1)(m+2)x^{-m-3}$$

$$=-\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}}\quad(x\neq0).$$

$$+ C_{100}^{1} \cdot \left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(99)}$$

$$= (1+x) \cdot \frac{199!!}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{201}{2}}$$

$$+ 100 \cdot \frac{197!!}{2^{99}}(1-x)^{-\frac{199}{2}}$$

$$= \frac{197!! \cdot (399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}} (x<1).$$

1161. $y = x^2 e^{2x}$；求 $y^{(20)}$.

解 $$y^{(20)} = x^2(e^{2x})^{(20)} + 2xC_{20}^{1} \cdot (e^{2x})^{(19)}$$

$$+ 2C_{20}^{2}(e^{2x})^{(18)}$$

$$= 2^{20}e^{2x}(x^2 + 20x + 95).$$

1162. $y = \frac{e^x}{x}$；求 $y^{(10)}$.

解 $$y^{(10)} = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^{i} e^x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{(10-i)}$$

$$= e^x \sum_{i=0}^{10} (-1)^i \frac{A_{10}^{i}}{x^{i+1}},$$

其中 $A_{10}^{i} = 10 \cdot 9 \cdots (11-i)$ 及 $A_{10}^{0} = 1$.

1163. $y = x\ln x$；求 $y^{(5)}$.

解 $y' = 1 + \ln x$, $y'' = \frac{1}{x}$,

$$y^{(5)} = -\frac{3!}{x^4} (x>0).$$

1164. $y = \frac{\ln x}{x}$；求 $y^{(5)}$.

解　$y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$,

$$y'' = \frac{-\dfrac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4}$$

$$= -\frac{3 - 2\ln x}{x^3}$$

$$y''' = -\frac{-\dfrac{2}{x} \cdot x^3 - 3x^2(3 - 2\ln x)}{x^6}$$

$$= \frac{11 - 6\ln x}{x^4}.$$

$$y^{(4)} = \frac{-\dfrac{6}{x} \cdot x^4 - 4x^3(11 - 6\ln x)}{x^8}$$

$$= -\frac{50 - 24\ln x}{x^5}.$$

$$y^{(5)} = -\frac{-\dfrac{24}{x} \cdot x^5 - 5x^4(50 - 24\ln x)}{x^{10}}$$

$$= \frac{274 - 120\ln x}{x^6}(x > 0).$$

1165. $y = x^2\sin 2x$；求 $y^{(50)}$

解　$y^{(50)} = x^2(\sin 2x)^{(50)} + C_{50}^1 \cdot 2x \cdot (\sin 2x)^{(49)}$

$$+ 2C_{50}^2(\sin 2x)^{(48)}$$

$$= 2^{50}x^2\sin\left(2x + \frac{50}{2}\pi\right)$$

$$+ 100x \cdot 2^{49}\sin\left(2x + \frac{49}{2}\pi\right)$$

$$+\frac{50\cdot 49}{1\cdot 2}\cdot 2^{49}\cdot\sin\left(2x+\frac{48}{2}\pi\right)$$

$$=2^{50}\left(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x\right.$$

$$\left.+\frac{1225}{2}\sin 2x\right).$$

1166. $y=\frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$，求 y'''.

解 $$y'''=\cos 3x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)'''$$

$$+C_3^1(\cos 3x)'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)''$$

$$+C_3^2(\cos 3x)''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)'$$

$$+(\cos 3x)'''\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}$$

$$=-\frac{28}{3^3}(-3)^3\cdot\frac{\cos 3x}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}}$$

$$+3(-3\sin 3x)\cdot\left(\frac{4}{3^2}\right)(-3)^2$$

$$\cdot\frac{1}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}}+3\cdot(-3^2\cos 3x)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\cdot(-3)\cdot\frac{1}{(1-3x)^{\frac{4}{3}}}+3^3\sin 3x$$

$$\cdot\frac{1}{(1-3x)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{28-27(1-3x)^2}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}}\cos 3x$$

$$+\frac{27(1-3x)^2-36}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}}\sin 3x\left(x\neq\frac{1}{3}\right).$$

1167. $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$；求 $y^{(10)}$.

解 利用三角函数和，差与其积的互化公式，将 y 化简得

$$y=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 2x.$$

于是，

$$y^{(10)}=\frac{1}{4}\cdot 4^{10}\sin\left(4x+\frac{10}{2}\pi\right)$$
$$-\frac{1}{4}\cdot 6^{10}\sin\left(6x+\frac{10}{2}\pi\right)$$
$$+\frac{1}{4}\cdot 2^{10}\sin\left(2x+\frac{10}{2}\pi\right)$$
$$=-2^{18}\sin 4x+2^8\cdot 3^{10}\sin 6x-2^8\sin 2x.$$

1168. $y=x\operatorname{sh}x$；求 $y^{(100)}$.

解 $$y^{(100)}=x(\operatorname{sh}x)^{(100)}+C_{100}^1(\operatorname{sh}x)^{(99)}$$
$$=x\operatorname{sh}x+100\operatorname{ch}x.$$

1169. $y=e^x\cos x$；求 $y^{(4)}$.

解 $$y'=e^x(\cos x-\sin x),$$
$$y''=e^x[(\cos x-\sin x)+(-\sin x-\cos x)]$$
$$=-2e^x\sin x,$$
$$y'''=-2e^x(\sin x+\cos x),$$
$$y^{(4)}=-2e^x[(\sin x+\cos x)+(\cos x-\sin x)]$$

$$=-4e^{x}\cos x.$$

1170. $y=\sin^2 x\ln x$；求 $y^{(6)}$.

解 $$y=\frac{1-\cos 2x}{2}\ln x$$

$$=\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\cos 2x\cdot\ln x.$$

$$y^{(6)}=\frac{(-1)^5}{2}\cdot\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{x^6}$$

$$-\frac{1}{2}(\cos 2x\cdot\ln x)^{(6)}$$

$$=-\frac{60}{x^6}+\left(\frac{144}{x^5}-\frac{160}{x^3}+\frac{96}{x}\right)\sin 2x$$

$$+\left(\frac{60}{x^6}-\frac{180}{x^4}+\frac{120}{x^2}+32\ln x\right)\cos 2x.$$

于下列各例中，视 x 为自变数，求指定的阶的微分.

1171. $y=x^5$；求 d^5y.

解 $$d^5y=5!dx^5=120dx^5.$$

1172. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$；求 d^3y.

解 $$d^3y=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-\frac{7}{2}}dx^3$$

$$=-\frac{15}{8x^3\cdot\sqrt{x}}dx^3\ (x>0).$$

1173. $y=x\cos 2x$；求 $d^{10}y$.

解 $$d^{10}y=(x\cos 2x)^{(10)}dx^{10}$$

$$=\left[2^{10}x\cos\left(2x+\frac{10\pi}{2}\right)\right.$$

$$+ 10 \cdot 2^9 \cos\left(2x + \frac{9}{2}\pi\right)\Big]dx^{10}$$

$$= - 1024(x\cos 2x + 5\sin 2x)dx^{10}.$$

1174. $y = e^x \ln x$；求 $d^4 y$.

解 $d^4 y = (e^x \ln x)^{(4)} dx^4$

$$= e^x\left(\ln x + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{6}{x^4}\right) dx^4.$$

1175. $y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x$；求 $d^6 y$.

解 $d^6 y = (\cos x \cdot \operatorname{ch} x)^{(6)} dx^6 = 8\sin x \operatorname{sh} x dx^6$.

设 u 为 x 的可微分足够多次的函数，于下列各例中求指定的阶的微分.

1176. $y = u^2$；求 $d^{10} y$.

解 $d^{10} y = d^{10}(u \cdot u) = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i d^{10-i} u \cdot d^i u$

$$= u d^{10} u + 10 d^9 u \cdot du + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} d^8 u \cdot d^2 u$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^7 u d^3 u$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^6 u d^4 u$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (d^5 u)^2$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^4 u d^6 u$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 u d^7 u + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} d^2 u d^8 u$$

$$+10dud^9u+ud^{10}u$$

$$=2ud^{10}u+20dud^9u+90d^2ud^8u$$

$$+240d^3ud^7u+420d^4ud^6u+252(d^5u)^2.$$

1177. $y=e^u$;求 d^4y.

解 $dy=e^u du$,

$$d^2y=e^u du^2+e^u d^2u,$$

$$d^3y=e^u[(du^3+dud^2u)+d(du^2)+d^3u]$$

$$=e^u(du^3+3dud^2u+d^3u),$$

$$d^4y=e^u[(du^4+3du^2d^2u+dud^3u)$$

$$+d(du^2\cdot du)+3d(dud^2u)+d^4u]$$

$$=e^u(du^4+6du^2d^2u+3d^2u^2+4dud^3u$$

$$+d^4u).$$

1178. $y=\ln u$;求 d^3y.

解 $dy=\frac{1}{u}du$,

$$d^2y=-\frac{1}{u^2}du^2+\frac{1}{u}d^2u,$$

$$d^3y=\frac{2}{u^3}du^3-\frac{2}{u^2}dud^2u-\frac{1}{u^2}d^2udu$$

$$+\frac{1}{u}d^3u$$

$$=\frac{2}{u^3}du^3-\frac{3}{u^2}dud^2u+\frac{1}{u}d^3u.$$

1179. 视 x 为某个自变数的函数，由函数 $y = f(x)$ 求 d^2y, d^3y 及 d^4y.

解 $dy = f'(x)dx$

$$d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$$

$$d^3y = f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dxd^2x + f'(x)d^3x,$$

$$\begin{aligned} d^4y = & f^{(4)}(x)dx^4 + 3f'''(x)dx^2d^2x \\ & + 3f'''(x)dx^2d^2x + 3f''(x)(d^2x)^2 \\ & + dxd^3x) + f''(x)dxd^3x + f'(x)d^4x \\ = & f^{(4)}(x)dx^4 + 6f'''(x)dx^2d^2x \\ & + 4f''(x)dxd^3x + 3f''(x)(d^2x)^2 \\ & + f'(x)d^4x. \end{aligned}$$

1180. 以变量 x 和 y 的逐次微分来表示函数 $y = f(x)$ 的导函数 y'' 及 y，但不假定 x 为自变量.

解 $y' = \dfrac{dy}{dx}$,

$$y'' = \frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^3},$$

$$y''' = \frac{d\left(\dfrac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}\right)}{dx}$$

$$= \frac{dx\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^3x & d^3y \end{vmatrix} - 3d^2x\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^5}.$$

1181. 证明:函数

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x,$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数,满足方程

$$y'' + y = 0.$$

证 $y' = -C_1\sin x + C_2\cos x,$

$$y'' = -C_1\cos x - C_2\sin x = -y,$$

所以

$$y'' + y = 0.$$

1182. 证明:函数

$$y = C_1\operatorname{ch}x + C_2\operatorname{sh}x,$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数,满足方程

$$y'' - y = 0.$$

证 $y' = C_1\operatorname{sh}x + C_2\operatorname{ch}x,$

$$y'' = C_1\operatorname{ch}x + C_2\operatorname{sh}x = y,$$

所以

$$y'' - y = 0.$$

1183. 证明:函数

$$-C_1\sin(\ln x)]\},$$

于是，

$$x^2y''+(1-2n)xy'+(1+n^2)y$$

$$=x^n\{(n^2-n-1)[C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)]$$

$$+(2n-1)[C_2\cos(\ln x)-C_1\sin(\ln x)]\}$$

$$+(1-2n)x^n\{n[C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)]$$

$$+[C_2\cos(\ln x)-C_1\sin(\ln x)]\}$$

$$+(1+n^2)x^n[C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)]$$

$$=0.$$

1185. 证明：函数

$$y=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

其中 C_1,C_2,C_3 及 C_4 为任意常数，满足方程

$$y^{(4)}+y=0.$$

证 $$y'=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\frac{C_1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right.$$

$$\left.-\frac{C_1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(-\frac{C_3}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right.$$

$$-\frac{C_4}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_3}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\left.+\frac{C_4}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

$$y''=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\frac{C_1}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right.$$

$$-\frac{C_1}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$-\frac{C_1}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\left.-\frac{C_1}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_2}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\frac{C_3}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_4}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right.$$

$$+\frac{C_3}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_4}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$+\frac{C_3}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_4}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\left.-\frac{C_3}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_4}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_2\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-C_1\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-C_4\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

$$y^{(4)}=(y'')''=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(-C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right.$$

$$- C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\Big)$$

$$+ e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(- C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}} - C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= - y,$$

于是，

$$y^{(4)} + y = 0.$$

1186. 证明：若函数 $f(x)$ 有 n 阶导函数，则

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

证 每求一次导函数，均要乘以因子 $(ax+b)' = a$，所以

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

1187. 若 $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$，求 $P^{(n)}(x)$.

解 $P'(x) = a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$

$$P''(x) = a_0n(n-1)x^{n-2} + a_1(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots + a_{n-2}$$

……

$$P^{(n)}(x) = n!a_0.$$

求 $y^{(n)}$，设：

1188. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

解 $y' = \dfrac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$;

$y'' = -\dfrac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}$;

利用数学归纳法，可证得

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+1}}$$

$$\left(x \neq -\frac{d}{c}, c \neq 0\right).$$

事实上，对于 $n=2$ 等式成立，设对于 n 等式成立，则对于 $n+1$ 有

$$y^{(n+1)} = \frac{-(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!(n+1)(cx+d)^n \cdot c}{(cx+d)^{2(n-1)}}$$

$$= \frac{(-1)^{(n+1)-1}c^{(n+1)-1}(ad-bc)(n+1)!}{(cx+d)^{(n+1)+1}}$$

即对于 $n+1$ 等式也成立，于是得证.

1189. $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$.

解 $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x}$.

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}$$

$$= n!\left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$$

$$(x \neq 0, x \neq 1).$$

1190. $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

解 $y = \dfrac{1}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$.

$$y^{(n)} = (-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$$

$$(x \neq 1, x \neq 2).$$

1191. $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

解 $$y^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots$$

$$\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(-2)^n(1-2x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}\left(x < \frac{1}{2}\right).$$

1192. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$.

解 $$y = \frac{(x+1)-1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{\frac{1}{2}} - (1+x)^{-\frac{1}{3}}.$$

$$y^{(n)} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\cdots$$

$$\left(-\frac{3n-5}{3}\right)(1+x)^{-\frac{3n-2}{3}}$$

$$-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\cdots$$

$$\left(-\frac{3n-2}{3}\right)(1+x)^{-\frac{3n+1}{3}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 4\cdots(3n-5)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}[2(1+x)$$

$$+(3n-2)]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}$$

$(n \geqslant 2; x \neq -1)$.

1193. $y = \sin^2 x$.

解 $y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$,

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = (\sin 2x)^{(n-1)}$$

$$= 2^{n-1}\sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right)$$

$$= -2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1194. $y = \cos^2 x$.

解 $y' = -2\cos x\sin x = -\sin 2x$,

$$y^{(n)} = -(\sin 2x)^{(n-1)}$$

$$= -2^{n-1}\sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right)$$

$$= 2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1195. $y = \sin^3 x$.

解 $y = \sin x\sin^2 x = \dfrac{1}{2}\sin x(1 - \cos 2x)$

$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x\cos 2x$$

$$= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x.$$

$$y^{(n)} = \frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1196. $y = \cos^3 x$.

解 $y = \cos x \cos^2 x = \frac{1}{2}\cos x(1 + \cos 2x)$

$$= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x \cos 2x$$

$$= \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x.$$

$$y^{(n)} = \frac{3}{4}\cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) + \frac{3^n}{4}\cos\left(3x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1197. $y = \sin ax \sin bx$.

解 $y = \frac{1}{2}\cos(a - b)x - \frac{1}{2}\cos(a + b)x.$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}(a - b)^n \cos\left[(a - b)x + \frac{n}{2}\pi\right]$$

$$- \frac{1}{2}(a + b)^n \cos\left[(a + b)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

1198. $y = \cos ax \cos bx$.

解 $y = \frac{1}{2}\cos(a - b)x + \frac{1}{2}\cos(a + b)x.$

$$y^{(n)} = \frac{(a - b)^n}{2}\cos\left[(a - b)x + \frac{n}{2}\pi\right]$$

$$+ \frac{1}{2}(a + b)^n \cos\left[(a + b)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

1199. $y = \sin ax \cos bx$.

解 $y = \frac{1}{2}\sin(a + b)x + \frac{1}{2}\sin(a - b)x,$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}(a + b)^n \sin\left[(a + b)x + \frac{n}{2}\pi\right]$$

$$+ \frac{1}{2}(a - b)^n \sin\left[(a - b)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

1200. $y = \sin^2 ax \cos bx$.

解 $y = \frac{1}{2}\cos bx(1 - \cos 2ax)$

$$= \frac{1}{2}\cos bx - \frac{1}{4}\cos(2a + b)x$$

$$- \frac{1}{4}\cos(2a - b)x.$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}b^n\cos\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right)$$

$$- \frac{1}{4}(2a + b)^n\cos\left[(2a + b)x + \frac{n}{2}\pi\right]$$

$$- \frac{1}{4}(2a - b)^n\cos\left[(2a - b)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

1201. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

解 $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

$$y^{(n)} = 4^{n-1}\cos\left(4x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1202. $y = x\cos ax$.

解 $y^{(n)} = x(\cos ax)^{(n)} + n(\cos ax)^{(n-1)}$

$$= a^n x\cos\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right)$$

$$+ na^{n-1}\cos\left(ax + \frac{n-1}{2}\pi\right)$$

$$= a^n x\cos\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right)$$

$$+ na^{n-1}\sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1203. $y = x^2\sin ax$.

解 $$y^{(n)} = a^n x^2 \sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right)$$
$$+ 2na^{n-1}x\sin\left(ax + \frac{n-1}{2}\pi\right)$$
$$+ n(n-1)a^{n-2}\sin\left(ax + \frac{n-2}{2}\pi\right)$$
$$= a^n\left[x^2 - \frac{n(n-1)}{a^2}\right]\sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right)$$
$$- 2na^{n-1}x\cos\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1204. $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

解 $$y^{(n)} = (-1)^n(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$
$$+ 2(-1)^{n-1}(x+1)e^{-x}\cdot n$$
$$+ (-1)^{n-2}n(n-1)e^{-x}$$
$$= (-1)^n e^{-x}[x^2 - 2(n-1)x$$
$$+ (n-1)(n-2)].$$

1205. $y = \frac{e^x}{x}$.

解 $$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^x \left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}$$
$$= e^x\left\{\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{x^{k+1}}\right\}.$$

1206. $y = e^x\cos x$.

1209. $y=e^{ax}P(x)$，其中 $P(x)$ 为多项式.

解 $y^{(n)}=e^{ax}[a^nP(x)+C_n^1a^{n-1}P'(x)$

$+\cdots+P^{(n)}(x)]$.

1210. $y=x\operatorname{sh}x$.

解 $y^{(n)}=x(\operatorname{sh}x)^{(n)}+n(\operatorname{sh}x)^{(n-1)}$

$=\frac{x}{2}[e^x-(-1)^ne^{-x}]$

$+\frac{n}{2}[e^x-(-1)^{n-1}e^{-x}]$

$=\frac{1}{2}[(x+n)e^x-(-1)^n(x-n)e^{-x}]$

$=\frac{1}{2}[(x+n)(\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x)$

$-(-1)^n(x-n)(\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x)]$

$=\frac{1}{2}\{[(x+n)-(-1)^n(x-n)]\operatorname{ch}x$

$+[(x+n)+(-1)^n(x-n)]\operatorname{sh}x\}$.

1211. 求 d^ny，设 $y=x^ne^x$.

解 $d^ny=y^{(n)}dx^n$

$=e^x\left(x^n+n^2x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}\right.$

$\left.+\cdots+n!\right)dx^n$.

1212. 求 d^ny，设 $y=\frac{\ln x}{x}$.

解 $d^ny=y^{(n)}dx^n$

$$=\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}\ln x+n\cdot\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}\right.$$

$$+C_n^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-2)}$$

$$\left.+\cdots+\frac{1}{x}(\ln x)^{(n)}\right]dx^n$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left[\ln x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]dx^n(x>0).$$

1213. 证明等式：

$$(1)\left[e^{ax}\sin(bx+c)\right]^{(n)}$$

$$=e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+c+n\varphi)$$

及 $(2)\left[e^{ax}\cos(bx+c)\right]^{(n)}$

$$=e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+c+n\varphi),$$

其中 $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

证 $(1)\left[e^{ax}\sin(bx+c)\right]'$

$$=e^{ax}\left[a\sin(bx+c)+b\cos(bx+c)\right]$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+c)\right.$$

$$\left.+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(bx+c)\right)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin(bx+c+\varphi),$$

其中 $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$\left[e^{ax}\sin(bx+c)\right]''$$

$$= (a^2+b^2)^{\frac{2}{2}} e^{ax}\sin(bx+c+2\varphi),$$

$\cdots\cdots\cdots$

利用数学归纳法可证得

$$[e^{ax}\sin(bx+c)]^{(n)}$$
$$= (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\sin(bx+c+n\varphi).$$

(2) 同理可证

$$[e^{ax}\cos(bx+c)]^{(n)}$$
$$= (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\cos(bx+c+n\varphi).$$

1214. 求 $y^{(n)}$，设：

(а) $y=\text{ch}ax\cos bx$；(б) $y=\text{ch}ax\sin bx$；

(в) $y=\text{sh}ax\cos bx$；(г) $y=\text{sh}ax\sin bx$.

解 (а) $y=\frac{1}{2}e^{ax}\cos bx+\frac{1}{2}e^{-ax}\cos bx$,

利用 1213 题(2) 的结果，得

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}[e^{ax}\cos(bx+n\varphi)$$
$$+e^{-ax}\cos(bx+n\pi-n\varphi)]$$
$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\Big\{e^{ax}\Big[\cos\Big(bx$$
$$+\frac{n}{2}\pi\Big)\cos\Big(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\Big)$$
$$-\sin\Big(bx+\frac{n}{2}\pi\Big)\sin\Big(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\Big)\Big]$$

$$+e^{-ax}\left[\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\cos\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right.$$

$$\left.\left.+\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right]\right\}$$

$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left\{\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right.$$

$$\cdot\cos\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)-\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$$

$$\left.\cdot\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right.$$

$$\cdot\operatorname{ch}ax\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)$$

$$\left.-\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\operatorname{sh}ax\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right]$$

同样方法可求得：

(б)$y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{ch}ax\right.$

$$\cdot\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)+\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\operatorname{sh}ax$$

$$\left.\cdot\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right];$$

(в)$y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\sin n\varphi\operatorname{ch}ax\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right.$

$$\left.+\cos n\varphi\operatorname{sh}ax\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right];$$

(г)$y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[-\sin n\varphi\operatorname{ch}ax\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right.$

$$\left.+\cos n\varphi\operatorname{sh}ax\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right].$$

其中　$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

1215. 将函数

$$f(x)=\sin^{2p}x,$$

其中 p 为自然数，化为三角多项式：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p}A_k\cos 2kx,$$

以求 $f^{(n)}(x)$.

解 设 $t=\cos x+i\sin x$，则

$$\sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t})$$

其中 $\bar{t}$ 为 t 的共轭复数.

于是

$$\sin^{2p}x=\frac{1}{(2i)^{2p}}(t-\bar{t})^{2p}$$

$$=\frac{1}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}C_{2p}^{k}t^{2p-k}(-1)^k\bar{t}^k$$

$$=(-1)^p\frac{1}{(2i)^{2p}}C_{2p}^{p}+\frac{2}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{p-1}C_{2p}^{k}(-1)^k$$

$$\cdot\cos(2p-2k)x.$$

所以，

$$(\sin^{2p}x)^{(n)}=\frac{2}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{p-1}C_{2p}^{k}(-1)^k(2p$$

$$-2k)^n\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p+k}2^{n-2p+1}(p-k)^n$$

$$C_{2p}^{k}\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right].$$

1216. 设：

(a) $f(x)=\sin^{2p+1}x$;　　(б) $f(x)=\cos^{2p}x$;

(в) $f(x)=\cos^{2p+1}x$,

其中 p 为正整数,求 $f^{(n)}(x)$.

解　(a) 设 $t=\cos x+i\sin x$,则

$$\sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t}),$$

$$\sin^{2p+1}x=\frac{1}{(2i)^{2p+1}}\sum_{k=0}^{2p+1}C_{2p+1}^{k}t^{2p+1-k}(-1)^{k}\bar{t}^{k}$$

$$=\frac{1}{(2i)^{2p+1}}\sum_{k=0}^{2p+1}C_{2p+1}^{k}(-1)^{k}[\cos(2p+1-2k)x+i\sin(2p+1-2k)x]$$

$$=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}2^{-2p}C_{2p+1}^{k}\sin(2p+1-2k)x.$$

所以,

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}C_{2p+1}^{k}\frac{(2p+1-2k)^{n}}{2^{2p}}\cdot\sin\left[(2p+1-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right]$$

类似 1215 题及本题(a) 的方法,可求得:

(б) $f^{n}(x)=(\cos^{2p}x)^{(n)}$

$$=\sum_{k=0}^{p-1}2^{n-2p+1}(p-k)^{n}C_{2p}^{k}\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right];$$

(в) $f^{(n)}(x)=(\cos^{2p+1}x)^{(n)}$

$$=\sum_{k=0}^{p}\frac{(2p+1-2k)^{n}}{2^{2p}}C_{2p+1}^{k}\cos[(2p+1$$

$- 2k)x + \frac{n}{2}\pi\Big\}.$

1217. 利用恒等式

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

证明

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\operatorname{arcctg}x].$$

证 将复数 $x+i$ 及 $x-i$ 化成下列形式：

$$x + i = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

$$x - i = r(\cos\theta - i\sin\theta).$$

其中 $r = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}, \theta = \operatorname{arcctg}x.$

于是

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)} = \frac{1}{2i}\left[\left(\frac{1}{x-i}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+i}\right)^{(n)}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{2i(x^2+1)^{n+1}}[(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}]$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{2i(x^2+1)^{n+1}}\{r^{n+1}[\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta] - r^{n+1}[\cos(n+1)\theta - i\sin(n+1)\theta]\}$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{n+1}} r^{n+1}\sin(n+1)\theta$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\operatorname{arc\,ctg}x],$$

所以，

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\text{arc ctg}x].$$

1218. 求函数 $f(x)=\text{arc tg}x$ 的 n 阶导函数．

解 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

利用 1217 题的结果，得

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}}\sin[n\text{arc ctg}x]$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n\text{arc tg}\frac{1}{x}\right)$$

$(x\neq 0)$.

求 $f^{(n)}(0)$，设：

1219. (a) $f(x)=\dfrac{1}{(1-2x)(1+x)}$;

(6) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$.

解 (a) $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1-2x}\right)$.

于是，

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}+\frac{n!2^{n+1}}{(1-2x)^{n+1}}\right].$$

所以

$$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{3}[(-1)^n+2^{n+1}].$$

(6) $f(x)=-\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

于是，

$$f^{(n)}(x)=\frac{(2n-3)!!}{2^n}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}}$$

$$+\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}}.$$

所以

$$f^{(n)}(0)=\frac{(2n-3)!!}{2^n}+\frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

$$=\frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}}(n>1).$$

1220. (a) $f(x)=x^2e^{ax}$;　　(б) $f(x)=\text{arc tg}x$;

(в) $f(x)=\arcsin x$.

解　(a) $f^{(n)}(x)=x^2a^ne^{ax}+2nxa^{n-1}e^{ax}$

$$+n(n-1)a^{n-2}e^{ax},$$

$$f^{(n)}(0)=n(n-1)a^{n-2};$$

(б) 利用 1218 题的结果,得

$$f^{(2k)}(0)=0\text{ 及 }f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!$$

$$(k=0,1,2,\cdots);$$

(в) $y'=f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$y''=f''(x)=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

若以添加下标"0"表示在 $x=0$ 时的导数值,则得

$$y'_0=f'(0)=1, y''_0=f''(0)=0,$$

并且有

$$(1-x^2)y''-xy'=0.$$

对上式应用莱布尼兹公式,得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}$$
$$-xy^{(n+1)}-ny^{(n)}=0.$$

在上式中,令 $x=0$,则有

$$y_0^{(n+2)}-n(n-1)y_0^{(n)}-ny_0^{(n)}=0,$$

令 $x=0$,即得

$$y_0^{(n+2)}+(m^2-n^2)y_0^{(n)}=0.$$

由于 $y'_0=0$,故 $y_0^{(2k-1)}=f^{(2k-1)}(0)=0(k=1,2,\cdots)$;

又由于 $y''_0=-m^2$,故

$$\begin{aligned}y_0^{(2k)}&=f^{2k}(0)=-[m^2-(2k-2)^2]y_0^{(2k-2)}\\&=\{-[m^2-(2k-2)^2]\}\\&\quad\cdot\{-[m^2-(2k-4)^2]\}y_0^{(2k-4)}\\&=\cdots\cdots\\&=(-1)^{k-1}[m^2-(2k-2)^2]\\&\quad[m^2-(2k-4)^2]\cdots(m^2-2^2)y''_0\\&=(-1)^k m^2(m^2-2^2)\cdots[m^2-(2k-2)^2]\\&\quad(k=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

(б)$y'=f'(x)=\dfrac{m}{\sqrt{1-x^2}}\cos(m\operatorname{arc}\sin x)$,

$$\begin{aligned}y''=f''(x)&=\frac{m^2}{1-x^2}\sin(m\operatorname{arc}\sin x)\\&\quad+\frac{mx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\cos(m\operatorname{arc}\sin x).\end{aligned}$$

于是,

$$y'_0=f'(0)=m,y''_0=f''(0)=0,$$

并且有

$$(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0.$$

这与本题(a)所得的方程是一样的,因而也有与(a)同样的结果:

$$y_0^{(n+2)}+(m^2-n^2)y_0^{(n)}=0.$$

由于,$y''_0=0$,故 $y_0^{(2k)}=f^{(2k)}(0)=0\ (k=1,2,\cdots)$;

又由于 $y'_0 = m$，故

$$y_0^{(2k+1)} = f^{(2k+1)}(0)$$
$$= -[m^2 - (2k-1)^2]y_0^{2k-1} = \cdots$$
$$= (-1)^k m(m^2 - 1^2)\cdots[m^2 - (2k-1)^2]$$
$$(k = 1,2,\cdots).$$

1222. (a) $f(x) = (\operatorname{arc\,tg} x)^2$； (б) $f(x) = (\arcsin x)^2$.

解 (a) 仍以下标带“0”者表示在 $x = 0$ 时的导数值，应用莱布尼兹公式及 1220 题(б) 的结果，即得

$$f^{(2k-1)}(0) = (\operatorname{arc\,tg} x \cdot \operatorname{arc\,tg} x)_0^{(2k-1)}$$
$$= 0 \ (k = 1,2,\cdots)$$

及

$$f^{(2k)}(0) = (\operatorname{arc\,tg} x \cdot \operatorname{arc\,tg} x)_0^{(2k)}$$
$$= \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i (\operatorname{arc\,tg} x)_0^{(i)} \cdot (\operatorname{arc\,tg} x)_0^{(2k-i)}$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^{2i+1} (\operatorname{arc\,tg} x)_0^{(2i+1)}$$
$$\cdot (\operatorname{arc\,tg} x)_0^{(2k-2i-1)}$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^{2i+1} (-1)^i (2i)!$$
$$\cdot (-1)^{k-i-1}(2k-2i-2)!$$
$$= (-1)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(2k)!}{(2i+1)!(2k-2i-1)!}$$
$$\cdot (2i)!(2k-2i-2)!$$
$$= (-1)^{k-1}(2k)!$$
$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(2i+1)(2k-2i-1)}$$
$$= (-1)^{k-1}(2k)!$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{k-1}\left[\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2i+1}+\frac{1}{2k-2i-1}\right)\right]$$

$$= (-1)^{k-1}2(2k-1)!\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2(k-i)-1}$$

$$= (-1)^{k-1}(2k-1)! \cdot$$

$$2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2k-1}\right)(k=1,2,\cdots).$$

(6) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$ 或

$$\sqrt{1-x^2}f'(x) = 2\arcsin x,$$

对上式两边再求导，得

$$\sqrt{1-x^2}f''(x) - \frac{xf'(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

即

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) - 2 = 0.$$

应用莱布尼兹公式，得

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - 2nxf^{(n+1)}(x)$$

$$- n(n-1)f^{(n)}(x) - xf^{(n+1)}(x) - nf^{(n)}(x) = 0.$$

在上式中令 $x=0$，即得

$$f^{(n+2)}(0) - n^2f^{(n)}(0) = 0.$$

由于 $f'(0)=0$，故

$$f^{2k-1}(0) = 0\ (k=1,2,\cdots);$$

又由于 $f''(0)=2$，故

$$f^{(2k)}(0) = (2k-2)^2(2k-4)^2\cdots2^2f''(0)$$

$$= 2^{(2k-1)}[(k-1)!]^2(k=1,2,\cdots).$$

1223. 设

$$f(x)=(x-a)^n\varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 于 a 点的邻区内有 $(n-1)$ 阶的连续导函数，求 $f^{(n)}(a)$.

解 由莱布尼兹公式，得

$$\begin{aligned}f^{(n-1)}(x)=&(x-a)^n\varphi^{(n-1)}(x)\\&+C_{n-1}^1 n(x-a)^{n-1}\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots\\&+C_{n-1}^{n-2}n(n-1)\cdots 3(x-a)^2\varphi'(x)\\&+n!(x-a)\varphi(x).\end{aligned}$$

于是，$f^{(n-1)}(a)=0$.

按导数定义，即得

$$\begin{aligned}f^{(n)}(a)&=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}[(x-a)^{n-1}\varphi^{(n-1)}(x)\\&\quad+C_{n-1}^1 n(x-a)^{n-2}\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots\\&\quad+C_{n-1}^{n-2}n(n-1)\cdots 3(x-a)\varphi'(x)\\&\quad+n!\varphi(x)]\\&=n!\varphi(a).\end{aligned}$$

1224. 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}x^{2n}\sin\dfrac{1}{x}, & 若\ x\neq 0,\\ 0, & 若\ x=0\end{cases}$$

(n 为自然数) 于点 $x=0$ 有一直到 n 阶的导函数，而无 $(n+1)$ 阶导函数.

证 由莱布尼兹公式，当 $x\neq 0$ 时得

$$f^{(m)}(x)=\left(x^{2n}\sin\frac{1}{x}\right)^{(m)}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} C_m^i (x^{2n})^{m-i} \left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(i)}$$

首先指出，有

$$\left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(i)} = \sum_{k=1}^{i-1} \left[a_k x^{-(i+k)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) \right]$$

$$+ (-x^{-2})^i \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{i\pi}{2} \right),$$

$$(x \neq 0),$$

其中 a_k 是某些常数．现用数学归纳法证明之：

当 $i = 1$ 时，命题显然成立；

设当 $i = N$ 时，命题成立，要证命题对 $i = N + 1$ 时也成立．事实上，有

$$\left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(N+1)} = \sum_{k=1}^{N-1} a_k \left[x^{-(N+k)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) \right]'$$

$$+ \left[(-x^{-2})^N \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{N\pi}{2} \right) \right]'$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} a_k \Big[-(N+k) x^{-(N+1+k)}$$

$$\cdot \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) + x^{-(N+k)}$$

$$\cdot (-x^{-2}) \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k+1}{2}\pi \right) \Big]$$

$$+ \Big[N(-x^{-2})^{N-1} \cdot (2x^{-3})$$

$$\cdot \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{N\pi}{2} \right) + (-x^{-2})^{N+1}$$

$$\cdot \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{N+1}{2}\pi \right) \Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{(N+1)-1} \Big[b_k x^{-(N+1+k)}$$

$$\cdot \sin\left(\frac{1}{x}+\frac{k\pi}{2}\right)\Big]+(-x^{-2})^{N+1}$$

$$\cdot \sin\left(\frac{1}{x}+\frac{N+1}{2}\pi\right),$$

其中 b_k 是一些适当的常数．于是，命题对于一切自然数均成立．

因而，我们有

$$f^{(m)}(x)=\sum_{i=0}^{m}C_m^i\cdot\frac{(2n)!}{(2n-m+i)!}x^{2n-m+i}$$

$$\cdot\Big[\sum_{k=1}^{i-1}a_kx^{-(i+k)}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$+(-x^{-2})^i\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{i\pi}{2}\right)\Big](x\neq 0).$$

于是

$$f^{(m)}(x)=(-1)^m x^{2(n-m)}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{m\pi}{2}\right)$$

$$+O(|x|^{2(n-m)+1}(x\to 0)$$

$$(m=1,2,\cdots,n). \tag{*}$$

由于

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}x^{2n-1}\sin\frac{1}{x}=0,$$

故由(*)，得知

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\Big[-x^{2n-3}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{\pi}{2}\right)+O(|x|^{2n-2})\Big]$$

$$=0,$$

一直推下去，得

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(-1)^{n-1}x\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)+O(|x|^2)\right]$$

$$=0.$$

但

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(-1)^n}{x}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\right)+O(1)\right],$$

在 $x=0$ 近旁，$\frac{(-1)^n}{x}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\right)$ 无界且振荡，故 $\lim_{x\to 0}\left[\frac{(-1)^n}{x}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\right)+O(1)\right]$ 不存在，因而 $f^{(n+1)}(0)$ 不存在．证毕

1225. 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & 若\ x\neq 0,\\ 0, & 若\ x=0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 处是无穷次可微分的．作出此函数的图形．

证 当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$. 下面我们指出，对于任何自然数 n，均有

$$f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\ (x\neq 0),$$

其中 $P_n(t)$ 是关于 t 的多项式．现用数学归纳法证明之：

当 $n=1$ 时，命题显然成立；

设当 $n=k$ 时命题成立，即 $f^{(k)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_k\left(\frac{1}{x}\right)$，

$P_k(t)$ 是关于 t 的某多项式. 要证命题对于 $n=k+1$ 时也成立. 事实上,有

$$f^{(k+1)}(x)=\left[e^{-\frac{1}{x^2}}P_k\left(\frac{1}{x}\right)\right]'$$

$$=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}P_k\left(\frac{1}{x}\right)+e^{-\frac{1}{x^2}}P'_k\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=e^{-\frac{1}{x^2}}\left\{2\left(\frac{1}{x}\right)^3P_k\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x}\right)^2P'_k\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$=e^{-\frac{1}{x^2}}P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right),$$

其中 $P_{k+1}(t)$ 是关于 t 的另一多项式.

于是,命题对于一切自然数 n 均成立.

现在,证明函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是无穷次可微分的. 首先,注意到

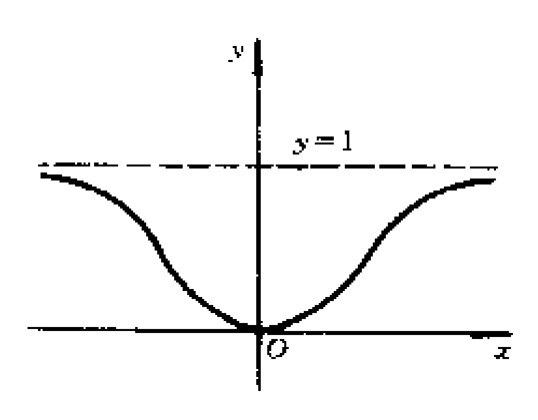


图 2.37

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0,$$

其中最末一式的极限求法可参看 654 题(6). 仍用此法,设 $f^{(n)}(0)=0$,则可证明 $f^{(n+1)}(0)=0$. 事实上,有

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{P_n^*\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right\}=0,$$

$(P_n^*(t)=tp_n(t)$ 也是 t 的多项式).

根据数学归纳法,可知 $f^{(n)}(0)=0$ 对于一切自然数 n 均成立,即函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无穷次可微分,且其各阶导数为零. 图象如图 2.37 所示.

1226. 证明:契比协夫多项式

$$T_m(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x)\ (m=0,1,2,\cdots)$$

满足方程式

$$(1-x^2)T''_m(x)-xT'_m(x)+m^2T_m(x)=0.$$

证 $T'_m(x)=\dfrac{m}{2^{m-1}\sqrt{1-x^2}}\sin(m\arccos x)$

$(|x|<1)$,

$$T''_m(x)=-\frac{m^2}{2^{m-1}(1-x^2)}\cos(m\arccos x)+\frac{mx}{2^{m-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(m\arccos x).$$

于是,

$$(1-x^2)T''_m(x)=-\frac{m^2}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x)+\frac{mx}{2^{m-1}\sqrt{1-x^2}}\sin(m\arccos x)$$

$$=-m^2T_m(x)+xT'_m(x),$$

即

$$(1-x^2)T''_m(x)-xT'_m(x)+m^2T_m(x)=0.$$

1227. 证明:勒襄德多项式

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}[(x^2-1)^m]^{(m)}\ (m=0,1,2,\cdots)$$

$$+\cdots+(-1)C_m^{m-1}m!xe^{-x}+m!e^{-x}\}$$
$$=(-1)^m x^m+(-1)^{m-1}C_m^1 mx^{m-1}$$
$$+\cdots+(-1)C_m^{m-1}m!x+m!$$
$$=(-1)^m[x^m-m^2x^{m-1}+\cdots$$
$$+(-1)^{m-1}m^2(m-1)!x+$$
$$(-1)^m m!]$$

其次，设 $y=x^m e^{-x}$，就有

$$y'=mx^{m-1}e^{-x}-x^m e^{-x},$$

于是，

$$xy'+(x-m)y=0.$$

在上述等式两端各取$(m+1)$阶导函数，按莱布尼兹公式，即得

$$xy^{(m+2)}+(m+1)y^{(m+1)}+(x-m)y^{(m+1)}$$
$$+(m+1)y^{(m)}=0$$

或

$$xy^{(m+2)}+(1+x)y^{(m+1)}+(m+1)y^{(m)}=0.$$

再设 $z=y^{(m)}$，则由上式可得

$$xz''+(1+x)z'+(m+1)z=0. \tag{1}$$

由于 $L_m(x)=e^x\cdot z$，故

$$L'_m(x)=e^x(z+z'),L''_m(x)=e^x(z+2z'+z''),$$

于是

$$xL''_m(x)+(1-x)L'_m(x)+mL_m(x)$$
$$=e^x\{x(z+2z'+z'')+(1+x)(z+z')+mz\}$$
$$=e^x\{xz''+(x+1)z'+(m+1)z\}. \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式，即证得

$$xL''_m(x)+(1-x)L'_m(x)+mL_m(x)=0.$$

1229. 设 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$，其中 $f(u)$ 及 $\varphi(x)$ 为可微分 n 次的函数.

证明：$$\frac{d^n y}{dx^n}=\sum_{k=1}^{n}A_k(x)f^{(k)}(u),$$
其中系数 $A_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 与函数 $f(u)$ 无关.

证 由于
$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\varphi'(x),$$
故命题当 $n=1$ 时成立；

设当 $n=m$ 时命题成立，即有
$$\frac{d^m y}{dx^m}=\sum_{k=1}^{m}A_k(x)f^{(k)}(u),$$
要证命题对于 $n=m+1$ 时也成立. 事实上，有
$$\begin{aligned}\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}&=\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{m}A_k(x)f^{(k)}(u)\\&=\sum_{k=1}^{m}\{A'_k(x)f^{(k)}(u)\\&\quad+A_k(x)f^{(k+1)}(u)\varphi'(x)\}\\&=\sum_{k=1}^{m+1}B_k(x)f^{(k)}(u),\end{aligned}$$
其中，$B_1(x)=A'_1(x)$，$B_k(x)=\varphi'(x)A_{k-1}(x)+A'_k(x)$ $(k=2,3,\cdots,m)$，$B_{m+1}(x)=A_m(x)\varphi'(x)$，它们均与 $f(u)$ 无关.

于是，按数学归纳法得知
$$\frac{d^n y}{dx^n}=\sum_{k=1}^{n}A_k(x)f^{(k)}(u)$$
对于一切自然数 n 均成立.

1230. 证明：对于复合函数 $y=f(x^2)$ 的 n 阶导函数，下面的公

式正确

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2)$$
$$+ \cdots.$$

证 当 $n=1$ 时公式成立，事实上，

$$\frac{dy}{dx} = 2xf(x^2).$$

设当 $n=m$ 时公式成立，要证公式对于 $n=m+1$ 时也成立．事实上，有

$$\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)$$
$$= 2m(2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) + (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2)$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1!} 2(m-2)(2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2)$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2)$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}$$
$$\cdot 2(m-4)(2x)^{m-5} f^{(m-2)}(x^2)$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}$$
$$\cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \cdots$$
$$= (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2)$$
$$+ \left[2m + \frac{m(m-1)}{1!}\right](2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2)$$
$$+ \left[\frac{2m(m-1)(m-2)}{1!}\right.$$
$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}\right]$$

$$\cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \cdots$$

$$= (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2)$$

$$+ \frac{(m+1)m}{1!}(2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2)$$

$$+ \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{2!}$$

$$\cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \cdots$$

这正是公式对于 $n = m + 1$ 时的情形．于是，按数学归纳法得知，公式对于一切自然数 n 均成立．

1231．契比协夫－厄耳米特多项式定义如下：

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2}(e^{-x^2})^{(m)} (m = 0, 1, 2, \cdots).$$

求多项式 $H_m(x)$ 的明显的表达式．

证明：$H_m(x)$ 满足方程

$$H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

解 设 $y = e^{-x^2}$，则有

$$y' = (-2x)e^{-x^2} = (-1)^1(2x)^1 e^{-x^2}.$$

$$y'' = e^{-x^2}[(-2x)^2 - 2]$$

$$= [(-1)^2(2x)^2 - 2]e^{-x^2},$$

一般地，可用数学归纳法证明

$$y^{(m)} = [(-1)^m(2x)^m + (-1)^{m-1}\frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2}$$

$$+ (-1)^{m-2}\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}$$

$$\cdot (2x)^{m-4} + \cdots]e^{-x^2}.$$

于是，得

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} y^{(m)}$$

$$= (2x)^m - \frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2}$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2x)^{m-4}-\cdots.$$

又 $y'+2xy=0$.

对上式两端各取$(m+1)$阶导函数，按莱布尼兹公式，即得

$$y^{(m+2)}+2xy^{(m+1)}+2(m+1)y^{(m)}=0.$$

再设 $z=y^{(m)}$，上式就是

$$z''+2xz'+2(m+1)z=0. \tag{1}$$

由 $H_m(x)=(-1)^m e^{x^2}z$，得

$$H'_m(x)=(-1)^m e^{x^2}(2xz+z'),$$

$$H''_m(x)=(-1)^m e^{x^2}[(4x^2+2)z+4xz'+z''].$$

从而有

$$\begin{aligned}&H''_m(x)-2xH'_m(x)+2mH_m(x)\\&=(-1)^m e^{x^2}\{(4x^2+2)z+4xz'+z''-4x^2z\\&\quad-2xz'+2mz\}\\&=(-1)^m e^{x^2}\{z''+2xz'+2(m+1)z\}.\end{aligned} \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式，即证得

$$H''_m(x)-2xH'_m(x)+2mH_m(x)=0.$$

1232. 证明等式

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}.$$

证 当 $n=1$ 时，由于$(e^{\frac{1}{x}})'=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$，故等式成立．

设当 $n=k$ 时等式成立，即有

$$(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}=\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}},$$

要证等式对 $n=k+1$ 时也成立．事实上，有

$$(x^k e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)}=[(x\cdot x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}]'$$

$$= [x(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} + k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)}]'$$

$$= x(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)} + (x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}$$

$$+ k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}$$

$$= x\left[\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}\right]' + (k+1)\cdot\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

$$+ \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^k(k+1)}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}.$$

于是，按数学归纳法得知

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

对于一切自然数 n 均成立.

1233. 设 $\frac{d}{dx} = D$ 表示微分算子及

$$f(D) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)D^k$$

为微分符号的多项式，其中 $p_k(x)$ $(k = 0,1,\cdots,n)$ 为 x 的某连续函数.

证明：

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x),$$

其中 λ 为常数.

证 按莱布尼兹公式，有

$$D^k\{e^{\lambda x}u(x)\} = [e^{\lambda x}u(x)]^{(k)}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i(e^{\lambda x})^{(i)}u^{(k-i)}(x)$$

$$= e^{\lambda x}\sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda^i u^{(k-i)}(x).$$

另一方面，有

$$(D+\lambda)^k u(x) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda^i D^{(k-i)} u(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda^i u^{(k-i)}(x).$$

因而，得

$$D^k\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x}(D+\lambda)^k u(x).$$

于是，

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) D^k\{e^{\lambda x}u(x)\}$$

$$= e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\cdot(D+\lambda)^k u(x)$$

$$= e^{\lambda x}(D+\lambda)u(x),$$

即

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x} f(D+\lambda) u(x).$$

1234. 证明：若于方程

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0$$

中，令

$$x = e^t,$$

其中 t 为自变数，则此方程具有下形

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y = 0,$$

其中 $D = \dfrac{d}{dt}$.

证　记 $\delta = \dfrac{d}{dx}$，则有

$$Dy = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = e^t \delta y \text{ 或 } \delta y = e^{-t} Dy.$$

从而对于符号 D 及 δ 有关系

$$\delta = e^{-t} D.$$

继续求得

$$\delta^2 y = e^{-t} D[e^{-t} Dy] = e^{-t}[-e^{-t} Dy + e^{-t} D^2 y]$$
$$= e^{-2t} D(D-1) y,$$

一般地，可用数学归纳法证得

$$\delta^{(k)} y = e^{-kt} D(D-1)\cdots(D-k+1) y. \qquad (1)$$

事实上，设公式(1) 对 $k = m$ 时成立，则有

$$\delta^{(m+1)} y = \delta(\delta^{(m)} y)$$
$$= e^{-t} D[e^{-mt} D(D-1)\cdots(D-m+1) y]$$
$$= e^{-t}[-m e^{-mt} D(D-1)\cdots(D-m+1) y$$
$$+ e^{-mt} D^2 (D-1)\cdots(D-m+1) y]$$
$$= e^{-(m-1)t} D(D-1)\cdots[D$$
$$-(m+1)+1] y,$$

即公式(1) 对 $k = m+1$ 时也成立．于是，公式(1) 对于一切自然数均成立．

于是，

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \delta^{(k)} y$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k e^{kt} \cdot e^{-kt} D(D-1)\cdots(D$$
$$-k+1) y = 0,$$

即

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D(D-1)\cdots(D-k+1) y = 0.$$

§ 6. 洛尔、拉格朗日及哥西定理

1° 洛尔定理　若函数 $f(x)$：(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的；(2) 在此区间内有有限的导函数 $f'(x)$；(3) $f(a) = f(b)$，则至少存在有一个数 c 于区间 (a, b) 内，使

$$f'(c) = 0, \text{ 其中 } a < c < b.$$

2° 拉格朗日定理　若函数 $f(x)$：(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的；(2) 在区间 (a, b) 内有有限的导函数，则

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c), \text{ 其中 } a < c < b$$

(有限增量公式).

3° 哥西定理　若函数 $f(x)$ 及 $g(x)$：(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的；(2) 于 (a, b) 内 $f(x)$ 及 $g(x)$ 有有限的导函数 $f'(x)$ 及 $g'(x)$；(3) 当 $a < x < b$，$f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$；(4) $g(a) \neq g(b)$，则

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

其中 $a < c < b$.

1235. 检验洛尔定理对于函数

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

的正确性.

解　(1) 函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 及 $[2, 3]$ 上连续；

(2) $f'(x)$ 在 $(1, 2)$ 及 $(2, 3)$ 上处处存在；

(3) $f(1) = f(2) = 0$ 及 $f(2) = f(3) = 0$.

由洛尔定理，应该有 $1 < c_1 < 2$，$2 < c_2 < 3$ 存在，使 $f'(c_1) = 0$，$f'(c_2) = 0$. 下面，我们验证确有这种 c_1, c_2 存在. 易知

$$f'(x) = (x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 3) + (x - 1)(x - 2)$$

$= F(b)$. 故由洛尔定理可知，在 (a,b) 内至少存在一点 c，使

$$F'(c) = 0.$$

而在 (a,b) 内，$F'(x) = f'(x)$，所以

$$f'(c) = 0.$$

下设 (a,b) 为无穷区间. 若 $a = -\infty, b = +\infty$，可设

$$x = \operatorname{tg} t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right),$$

则对由函数 $f(x)$ 与 $x = \operatorname{tg} t$ 组成的复合函数

$$g(t) = f(\operatorname{tg} t)$$

在有穷区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ 内仿前讨论可知：至少存在一点 $t_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$，使

$$g'(t_0) = f'(c) \cdot \sec^2 t_0 = 0,$$

其中 $c = \operatorname{tg} t_0$. 由于 $\sec^2 t_0 \neq 0$，故

$$f'(c) = 0.$$

若 a 为有限数，$b = +\infty$. 则可取 $b_0 > \max\{a, 0\}$，而令

$$x = \frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t}.$$

于是，对复合函数 $g(t) = f\left(\frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t} \right)$ 在有穷区间 (a, b_0) 上仿前讨论，可知：存在 $t_0 \in (a, b_0)$ 使

$$g'(t_0) = f'(c) \cdot \frac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_0)^2} = 0,$$

其中 $c = \frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t_0}$. 显然 $a < c < +\infty$ 由于

$$\frac{b_0(b_0-a)}{(b_0-t_0)^2}>0,$$

故 $f'(c)=0$.

对于 $a=-\infty$，b 为有限数的情形，可类似地进行讨论．证毕．

1238. 设函数 $f(x)$：(1) 于闭区间 $[x_0,x_n]$ 上有定义且有 $(n-1)$ 阶的连续导函数 $f^{(n-1)}(x)$；(2) 于区间 (x_0,x) 内有 n 阶导函数 $f^{(n)}(x)$；(3) 有下面的等式成立

$$f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_n)(x_0<x_1<\cdots<x_n).$$

证明：在区间 (x_0,x_n) 内最少有一点 ξ，使

$$f^{(n)}(\xi)=0.$$

证 在每一个闭区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{k-1},x_k],$$
$$\cdots,[x_{n-1},x_n]$$

上，函数 $f(x)$ 满足洛尔定理的条件．因此，存在 n 个点

$$x'_1,x'_2,\cdots,x'_k,\cdots,x'_n,$$

其中 $x'_k\in(x_{k-1},x_k)(k=1,2,\cdots,n)$，使

$$f'(x'_k)=0\ (k=1,2,\cdots,n).$$

于是，在每个区间 $[x'_k,x'_{k+1}](k=1,2,\cdots,n-1)$ 上，函数 $f'(x)$ 满足洛尔定理的条件．因此存在点 x''_k 属于 $[x'_k,x'_{k+1}](k=1,2,\cdots,n-1)$，使

$$f''(x''_k)=0\ (k=1,2,\cdots,n-1).$$

继续上述步骤，经 $(n-1)$ 次后，得出一个区间 $[x_1^{n-1},x_2^{n-1}]\subset(x_0,x_n)$，满足 $f^{(n-1)}(x_k^{n-1})=0\ (k=1,2)$.

于是在此区间上，函数 $f^{(n-1)}(x)$ 满足洛尔定理的条件．

所以，至少存在一点 $\xi(x_1^{n-1}, x_2^{n-1})$，使

$$f^{(n)}(\xi) = 0.$$

1239. 设函数 $f(x)$：(1) 于闭区间$[a, b]$上有定义且有$(p+q)$阶的连续导函数 $f^{(p+q)}(x)$；(2) 在区间(a,b)内有$(p+q+1)$阶的导函数 $f^{(p+q+1)}(x)$；(3) 有下面的等式成立：

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(p)}(a) = 0$$

及 $f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(q)}(b) = 0$

证明：在此种情形下

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0,$$

其中 c 为区间(a,b)内的某点.

证 若 $p = q$.

在$[a,b]$上 $f(x)$ 满足洛尔定理的条件，因此，至少存在一点 $x_1^{(1)} \in (a,b)$，使 $f'(x_1^{(1)}) = 0$；

对于区间$[a, x_1^{(1)}]$及$[x_1^{(1)}, b]$，函数 $f'(x)$ 在其上满足洛尔定理的条件，因此，至少分别存在 $x_2^{(1)}, x_2^{(2)}$，使 $f''(x_2^{(1)}) = 0, f''(x_2^{(2)}) = 0$；

…………

继续上述步骤，经过 p 次后，得出$(p+2)$个点：

$a, x_p^{(1)}, x_p^{(2)}, x_p^{(3)}, \cdots, x_p^{(p)}, b$

使 $f^{(p)}(a) = f^{(p)}(x_p^{(k)}) = f^{(p)}(b) = 0 \ (k = 1, 2, \cdots, p)$；

由此$(p+2)$个点组成$(p+1)$个区间，仿1238题对于它们重复使用洛尔定理 p 次，即可得出点 c 属于(a,b)，使

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0.$$

若 $p \neq q$，不失一般性，设 $q = p + k$(k 为某正整

数).

当进行$(p+1)$次后，对于函数$f^{(p)}(x)=0$而言，在(a,b)内有$(p+1)$个点：

$$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{p+1},$$

满足$f^{(p+1)}(\xi_k)=0\ (k=1,2,\cdots,p+1)$；

再加上条件$f^{(p+1)}(b)=f^{(p+2)}(b)=\cdots=f^{(p+k)}(b)=0$，重复对此再应用洛尔定理$k$次，则在$(a,b)$内仍然存在$(p+1)$个点：

$$\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots,\xi_{p+1}^{(k)},$$

使

$$f^{(p+k+1)}(\xi_j^{(k)})=0\ (j=1,2,\cdots,p+1).$$

以后，每进行一次，减少一个点，进行p次后，即可得出一点$c\in(a,b)$，使

$$f^{(p-k+q+1)}(c)=0,$$

即

$$f^{(p+q+1)}(c)=0.$$

证毕.

1240. 证明：若具实系数$a_k(k=0,1,\cdots,n)$的多项式

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n(a_0\neq 0)$$

之一切根为实数，则其逐次的导函数$P'_n(x),P''_n(x),\cdots,P_n^{(n-1)}(x)$也仅有实根.

证 根据假设，此处n次多项式$P_n(x)$有n个实根. 记其诸实根为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l$，并且$\alpha_i$是$k_i$重根，$k_i\geqslant 1\ (i=1,2,\cdots,l)$，有$k_1+k_2+\cdots+k_l=n$.

于是可改写$P_n(x)$为

$$P_n(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_1)^{k_l}.$$

显见 α_i 为 $P_n'(x)$ 的 k_i-1 重根$(i=1,2,\cdots,l)$.

由 $P_n(\alpha_1)=P_n(\alpha_2)=\cdots=P_n(\alpha_l)=0$,$P_n(x)$ 可微,据洛尔定理,存在 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{l-1}$,而 $\xi_i\in(\alpha_i,\alpha_{i+1})$,使 $P_n'(\xi_i)=0$ $(i=1,2,\cdots,l-1)$,于是有

$P'_n(x)$ 的根	$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{l-1}$	α_1	α_2	$\cdots$	α_l
重　数	单　　根	k_1-1	k_2-1	$\cdots$	k_l-1

即 $n-1$ 次多项式 $P'_n(x)$ 的根恰有$(k_1-1)+(k_2-1)+\cdots+(k_l-1)+(l-1)=k_1+k_2+\cdots+k_l-1=n-1$ 个,这就是说,一个 n 次多项式,若 n 个根均为实根的话,则其导函数 $n-1$ 次多项式的 $n-1$ 个根也必全为实根. 反复运用这一结果. 由 $P'_n(x)$ 的 $n-1$ 个根皆为实根,便可推知 $P_n''(x)$ 的 $n-2$ 个根也均为实根. 如此下去,即知关于 $P_n(x)$ 的一切低阶导函数——直至 $P^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根.

1241. 证明:勒襄德多项式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}$$

的一切根都是实数且包含于区间$(-1,1)$中.

证　显然,$2n$ 次多项式 $Q_{2n}(x)=(x^2-1)^n=(x+1)^n\cdot(x-1)^n$ 仅有实根(-1 是 n 重根,1 也是 n 重根). 因此,根据 1240 题的结果知 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}Q_{2n}(x)$ 仅有实根,且都含于$[-1,1]$中. 但显然 -1 和 1 都不是 $P_n(x)$ 的根(因为,例如,-1 是 $Q_{2n}(x)$ 的 n 重根,故

-1 是 $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}Q_{2n}(x)$ 的单根，因而 -1 不是 $\frac{d^n}{dx^n}Q_{2n}(x)$ 的根）。因此，$P_n(x)$ 的根全部位于 $(-1,1)$ 中．证毕．

1242. 证明：契比协夫——拉格耳多项式

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})$$

所有的根都是正数．

证 令 $Q(x)=x^ne^{-x}$，则易知

$$Q^{(m)}(x)=e^{-x}[(-1)^mx^n+(-1)^{m-1}C_m^1nx^{n-1}+\cdots+(-1)C_m^{m-1}n(n-1)\cdots(n-m+2)x^{n-m+1}+n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m}]\ (m=1,2,\cdots,n).$$

显然 $Q^{(m)}(0)=0$ $(m=0,1,\cdots,n-1$；为方便计，以下记 $Q^{(0)}(x)=Q(x))$，但 $Q^{(n)}(0)=n!\neq 0$. 又

$$\lim_{x\to+\infty}Q^{(m)}(x)=0\ (m=0,1,\cdots,n).$$

对函数 $Q(x)$ 和区间 $(0,+\infty)$ 应用 1237 题，知存在 $\xi^{(1)}\in(0,+\infty)$ 使 $Q'(\xi^{(1)})=0$. 再对函数 $Q'(x)$ 和区间 $(0,\xi^{(1)})$ 及 $(\xi^{(1)},+\infty)$ 应用 1237 题，知存在 $\xi_1^{(2)}\in(0,\xi^{(1)})$，$\xi_2^{(2)}\in(\xi^{(1)},+\infty)$ 使

$$Q''(\xi_i^{(2)})=0\ (i=1,2).$$

这样继续下去，反复应用 1237 题 n 次，知存在 $0<\xi_1^{(n)}<\xi_2^{(n)}<\cdots<\xi_n^{(n)}<+\infty$ 使

$$Q^{(n)}(\xi_i^{(n)})=0\ (i=1,2,\cdots,n).$$

显然 $L_n(\xi_i^{(n)})=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，故 $\xi_i^{(n)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 都是 $L_n(x)$ 的根．但由于

$$L_n(x)=e^xQ^{(n)}(x)$$

$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} C_n^1 n x^{n-1} + \cdots$$
$$+ (-1) C_n^{n-1} n! x + n!$$

是 x 的 n 次多项式，故 $L_n(x)$ 恰有 n 个根(实的或复的)，因此 $\xi_i^{(n)}(i = 1,2,\cdots,n)$ 是 $L_n(x)$ 的全部根．证毕．

1243. 证明：契比协夫 —— 厄耳米特多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

所有的根都是实数．

证　设 $Q(x) = e^{-x^2}$．显然有

$$Q'(x) = -2xe^{-x^2},$$
$$Q''(x) = 2e^{-x^2}(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1),$$

从而得知 $Q'(x) = 0$ 有一个实根，$Q''(x) = 0$ 有两个相异的实根．

设 $Q^{(k)}(x) = 0$ 有 k 个相异实根，并记成

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k,$$

注意到 $Q^{(k)}(x)$ 是 e^{-x^2} 与一个 k 次多项式的乘积，从而就有

$$Q^{(k)}(x) = Ae^{-x^2}(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_k),$$

其中 $A \neq 0$ 为某个常数．下面我们将证 $Q^{(k+1)}(x) = 0$ 有 $k + 1$ 个相异实根．事实上，由

$$Q^{(k)}(\alpha_i) = Q^{(k)}(\alpha_{i+1})(i = 1,2,\cdots,k - 1)$$

应用洛尔定理得知，存在 $\beta_i \in (\alpha_i,\alpha_{i+1})$，使

$$Q^{(k+1)}(\beta_i) = 0\ (i = 1,2,\cdots,k - 1).$$

又由于

$$\lim_{x \to -\infty} Q^{(k)}(x) = 0 \text{ 及 } Q^{(k)}(\alpha_1) = 0,$$

利用 1237 题的结果，故知存在 $\beta_0 \in (-\infty,\alpha_1)$，使

$$Q^{(k+1)}(\beta_0)=0.$$

同法可知，存在 $\beta_k\in(\alpha_k,+\infty)$，使

$$Q^{(k+1)}(\beta_k)=0.$$

于是，$Q^{(k+1)}(x)=0$ 有 $k+1$ 个实根．故由数学归纳法，知 $Q^{(n)}(x)=0$ 有 n 个相异实根($n=1,2,\cdots$)．从而 $H_n(x)$ 有 n 个相异实根．但是由于 $H_n(x)$ 是 x 的一个 n 次多项式，故 $H_n(x)$ 恰有 n 个根(实的或复的)．因此 $H_n(x)$ 所有的根都是实数．证毕．

1244．在曲线 $y=x^3$ 上某点的切线，平行于连接点 $A(-1,-1)$ 及点 $B(2,8)$ 所成的弦，求出此点．

解 由题设知 $y=x^3$ 在所求点(x_0,y_0)的切线斜率应为 $y'(x_0)=3x_0^2=\dfrac{8-(-1)}{2-(-1)}=3$．于是，

$$x_0=-1,\text{或 } x_0=1,$$

故所求的点为 $A(-1,-1)$ 及 $C(1,1)$．

1245．若 $ab<0$，有限增量的公式对于函数

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

在闭区间$[a,b]$上是否正确？

解 不正确．事实上，如果有限增量公式在此成立，则有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b),$$

即

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=-\frac{1}{\xi^2}(b-a)=\frac{a-b}{\xi^2}.$$

但是

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}.$$

所以

$$\frac{a-b}{\xi^2}=\frac{a-b}{ab},$$

即有 $\xi^2=ab<0$，这样产生矛盾．因此，有限增量公式对于函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在$[a,b](ab<0)$上不正确．原因是 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不存在，故有限增量公式的条件不满足．

1246. 设

(a) $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$； (б) $f(x)=x^3$；

(в) $f(x)=\frac{1}{x}$； (г) $f(x)=e^x$.

求满足

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x f'(x+\theta\Delta x)(0<\theta<1)$$

的函数 $\theta=\theta(x,\Delta x)$.

解 (a) $f'(x)=2ax+b$.

于是，有

$$a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c-ax^2-bx-c$$
$$=\Delta x[2a(x+\theta\Delta x)+b].$$

化简之，得 $\theta=\frac{1}{2}$.

(б) $f'(x)=3x^2$.

于是，有

$$(x+\Delta x)^3-x^3=3\Delta x(x+\theta\Delta x)^2.$$

如果 $x=0$，则 $\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

如果 $x\neq 0$，化简整理得

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

其中 $$\frac{1}{4}\leqslant\theta(x)\leqslant\frac{1}{2},$$

并且 $\lim\limits_{x\to+0}\theta(x)=\frac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

证 当 $x\geqslant 0$ 时,对函数 $\sqrt{x}$ 施用有限增量公式,即得

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

解之,得

$$\theta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}[\sqrt{x(x+1)}-x].$$

当 $x=0$ 时 $\theta=\frac{1}{4}$. 当 $x>0$ 时,有

$$0\leqslant\sqrt{x(x+1)}-x=\frac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x}<\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

于是

$$\frac{1}{4}\leqslant\theta(x)<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

且有

$$\lim_{x\to+0}\theta(x)=\frac{1}{4},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{1}{4}+\frac{x}{2[\sqrt{x(x+1)}+x]}\right\}=\frac{1}{2}.$$

1248.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x} & \text{当 } 1<x<+\infty.\end{cases}$$

在闭区间$[0,2]$上对于函数$f(x)$求有限增量公式中的中间值c.

解 $f(0)=\frac{3}{2}$, $f(2)=\frac{1}{2}$,

$$f'(x)=\begin{cases}-x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\dfrac{1}{x^2}, & \text{当 } 1<x<+\infty.\end{cases}$$

按题设有

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-c(2-0) \text{ 或 } \frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{1}{c^2}(2-0),$$

所以$c=\frac{1}{2}$或$c=\sqrt{2}$($-\sqrt{2}$不适合),此即所求的中间值c.

1249. 设:

$$f(x)-f(0)=xf'[\xi(x)],$$

其中　　$0<\xi(x)<x$.

证明:若

$$f(x)=x\sin(\ln x)\ (x>0)$$

及

$$f(0)=0$$

则函数$\xi=\xi(x)$于任意小的区间$(0,\varepsilon)$内(于此$\varepsilon>0$)是不连续的.

证 用反证法.假定$\xi(x)$在某区间$(0,\varepsilon)$内连续$(\varepsilon>0)$.

由于当 $x>0$ 时，

$$f'(x)=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln x\right),$$

故由 $f(x)-f(0)=xf'[\xi(x)]$ 得

$$x\sin(\ln x)=x\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln\xi(x)\right),$$

从而

$$\sin(\ln x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln\xi(x)\right),0<x<+\infty.$$

现取一个充分大的正整数 N，使

$$-2N\pi+\frac{\pi}{4}<\ln\xi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

由 $0<\xi(x)<x$ 知 $\lim\limits_{x\to 0+0}\xi(x)=0$，从而

$$\lim_{x\to 0+0}\ln\xi(x)=-\infty.$$

因此，可取 $0<\delta<\frac{\varepsilon}{2}$，使

$$\ln\xi(\delta)<-2N\pi+\frac{\pi}{4}.$$

由于 $\ln\xi(x)$ 在 $\left[\delta,\frac{\varepsilon}{2}\right]$ 上连续，根据中间值定理，必有 $x_0\in\left(\delta,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 存在，使

$$\ln\xi(x_0)=-2N\pi+\frac{\pi}{4}.$$

于是

$$1\geqslant\sin(\ln x_0)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln\xi(x_0)\right)$$
$$=\sqrt{2},$$

这是不可能的．证毕．

1250. 设函数 $f(x)$ 于区间 (a,b) 内有连续的导函数 $f'(x)$. 对于区间 (a,b) 内任何一点 ξ 可否从此区间中指出另外的两点 x_1 及 x_2 使满足于

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)\quad(x_1<\xi<x_2)?$$

解 一般地说,不可以. 例如,研究函数

$$f(x)=x^3(-1<x<1),$$

它对于 $\xi=0$ 就找不到所需的 x_1 和 x_2,使

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

事实上,$f'(\xi)=3\xi^2=0$,而当 $x_1<0<x_2$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}&=\frac{x_2^3-x_1^3}{x_2-x_1}\\&=x_2^2+x_1x_2+x_1^2\\&=x_2^2+x_1^2-|x_1|\cdot|x_2|\\&>x_2^2+x_1^2-2|x_1||x_2|\\&=(|x_1|-|x_2|)^2|\geqslant 0.\end{aligned}$$

1251. 证明下列不等式:

(а) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$;

(б) 若 $0<y<x$ 及 $p>1$, $py^{p-1}(x-y)<x^p-y^p<px^{p-1}(x-y)$;

(в) $|\operatorname{arc\,tg}a-\operatorname{arc\,tg}b|\leqslant|a-b|$;

(г) $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$,设 $0<b<a$.

证 (а) $|\sin x-\sin y|=|(x-y)\cos\xi|\leqslant|x-y|$($\xi$ 在 x,y 之间).

(б) $x^p-y^p=p(x-y)\xi^{p-1}$,其中 $0<y<\xi<x$.

由于 $p>1$，所以

$$y^{p-1}<\xi^{p-1}<x^{p-1}.$$

于是

$$py^{p-1}(x-y)<x^p-y^p<px^{p-1}(x-y);$$

*）原题的不等式中的等号可以去掉．

$$(\text{в})\ |\operatorname{arc\,tg}a-\operatorname{arc\,tg}b|=\left|\frac{a-b}{1+\xi^2}\right|\leqslant|a-b|;$$

$$(\text{г})\ \ln a-\ln b=\frac{a-b}{\xi}，\text{其中 } 0<b<\xi<a.$$

于是，

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

1252. 说明在闭区间$[-1,1]$上哥西定理对于函数 $f(x)=x^2$ 及 $g(x)=x^3$ 何以不真？

解 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在$[-1,1]$上虽有连续的导函数，且 $g(-1)\neq g(-1)$，但是，当 $x=0$ 时，

$$[f'(x)]^2+[g'(x)]^2=4x^2+9x^4=0,$$

因此，对于函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 不满足哥西定理的条件，所以结论可以不真．事实上

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=0,$$

而

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{2\xi}{3\xi^2}\neq 0\ \xi\in(-1,1),\xi\neq 0,$$

它们是不相等的．

1253. 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[x_1,x_2]$上可微分，并且 $x_1x_2>0$. 证明

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

其中 $x_1 < \xi < x_2$.

证 设 $g(x)=\frac{1}{x}$，$F(x)=\frac{f(x)}{x}$，由于 $x_1x_2>0$，故 $x=0$ 在 $[x_1,x_2]$ 之外．从而 $g(x)$ 和 $F(x)$ 均在 $[x_1,x_2]$ 上可微，且有

$$[g'(x)]^2+[F'(x)]^2$$
$$=\frac{1}{x^4}\{1+[xf'(x)-f(x)]^2\}\neq 0$$

及

$$g(x_1)\neq g(x_2).$$

因此，对于函数 $F(x)$ 和 $g(x)$ 满足哥西定理的条件．故在 (x_1,x_2) 内至少存在一点 ξ，使有

$$\frac{F(x_2)-F(x_1)}{g(x_2)-g(x_3)}=\frac{F'(\xi)}{g'(\xi)},$$

即

$$\frac{\frac{f(x_2)}{x_2}-\frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}=\frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}.$$

化简整理，即得

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

1254. 证明　若函数 $f(x)$ 于有穷的区间 (a,b) 内可微分，但无界，则其导函数 $f'(x)$ 于区间 (a,b) 内也无界．逆定理不真；举出例子．

证 在开区间 (a,b) 内，由于导函数存在，因此，$f(x)$ 在 (a,b) 内连续．

现在假定 $|f'(x)|<N$ $(a<x<b)$，即 $f'(x)$ 是

有界的．取定$c\in(a,b)$．则按有限增量公式可知，对任何$a<x<b$，均有

$$|f(x)-f(c)|=|x-c||f'(\xi)|<N(b-a),$$

其中ξ在c与x之间，从而属于(a,b)．

因为，

$$|f(x)-f(c)|\geqslant|f(x)|-|f(c)|,$$

所以

$$|f(x)|<|f(c)|+N(b-a).$$

此与$f(x)$是无界的条件相矛盾，所以$f'(x)$是无界的．

反之不一定正确．例如，函数

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}$$

在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$内有界，但其导函数却是无界的．

注意，在无限区间内无界的函数的导函数可能有界．例如，函数

$$f(x)=\ln x$$

在$(1,+\infty)$内无界，但其导函数$f'(x)=\frac{1}{x}$在$(1,+\infty)$内却是有界的．

1255. 证明：若函数$f(x)$于有穷或无穷的区间(a,b)内有有界的导函数$f'(x)$，则$f(x)$于(a,b)中一致连续．

证 设当$x\in(a,b)$时，$|f'(x)|\leqslant M$．对于任给的$\varepsilon>0$，取$\delta=\frac{\varepsilon}{M}$，则当$x_1,x_2\in(a,b)$且$|x_1-x_2|<\delta$时，就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|$$
$$=|x_1-x_2|\cdot|f'(\xi)|\leqslant M|x_1-x_2|<\varepsilon,$$

(ξ 在 x_1 与 x_2 之间),

于是,$f(x)$ 在(a,b)内一致连续.

1256. 证明:若函数 $f(x)$ 于无穷的区间$(x_0,+\infty)$内可微分,且

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

即:当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)=o(x)$.

证 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$,故对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $X_1>0$,使当 $x>X_1$ 时,恒有

$$|f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

今在$(X_1,+\infty)$内任取一点 a,则当 $x>a$ 时,由有限增量公式可得

$$|f(x)-f(a)|=|x-a|\cdot|f'(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2}|x-a|.$$

由于

$$|f(x)|-|f(a)|\leqslant|f(x)-f(a)|,$$

所以

$$|f(x)|\leqslant|f(a)|+\frac{\varepsilon}{2}|x-a|.$$

再取 $X_2>a$,使 $\frac{|f(a)|}{X_2}<\frac{\varepsilon}{2}$,则当 $x>X_2$ 时,

恒有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\frac{|f(a)|}{x}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{|x-a|}{x}$$

$$<\frac{|f(a)|}{X_2}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

即:当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)=o(x)$.

1257. 证明:若函数 $f(x)$ 于无穷的区间$(x_0,+\infty)$内可微分且当

$$x\to+\infty \text{ 时}, f(x)=o(x);$$

则 $$\lim_{x\to+\infty}|f'(x)|=0.$$

证 由条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ 易得对于任意常数 $a>x_0$,均有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\left(1+\frac{a}{x-a}\right)-\frac{f(a)}{x-a}\right]$$
$$=0.$$

于是,对于 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$,$a_n=\max\{n,x_0+1\}(n=1,2,\cdots)$,总存在 $b_n>a_n$,使

$$\left|\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right|<\varepsilon_n.$$

由拉格朗日定理知,存在 x_n;$a_n<x_n<b_n$,使

$$f'(x_n)=\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n},$$

即

$$|f'(x_n)|<\varepsilon_n(n=1,2,\cdots).$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty}|f'(x_n)|=0.$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}.$$

于是，

$$\lim_{x\to1}f'(x)=\lim_{x\to1}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}.$$

但是

$$\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}}{x-1}$$
$$=-\infty$$

及

$$\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}}{x-1}$$
$$=-\infty,$$

所以 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$ 皆不存在．

$y=f(x)$ 的图形如图 2.38 所示．当 $x\to1-0$ 时，$f(x)\to\frac{\pi}{2}$；当 $x\to1+0$ 时，$f(x)\to-\frac{\pi}{2}$．

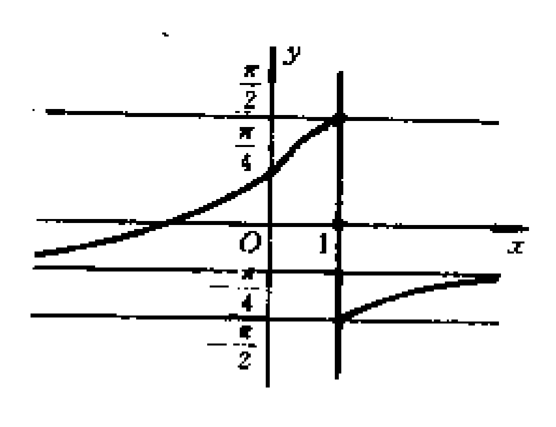


图 2.38

即 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类不连续点，即在 $x=1$ 处 $f(x)$ 产生跳跃，所以 $f(x)$ 在

$x=1$ 处无导数.

1259. 证明:若当 $a<x<b$ 时,$f'(x)=0$,则当

$a<x<b$ 时,$f(x)=$ 常数.

证 在(a,b)内取一定点 x_0,则当 $a<x<b$ 时,按有限增量公式可得

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)\cdot(x-x_0)$$

其中 c 在 x_0 与 x 之间. 由于 $f'(c)=0$,故

$$f(x)-f(x_0)=0,$$

即

$$f(x)=f(x_0)=\text{常数}.$$

1260. 证明:导函数为常数

$$f'(x)=k$$

的唯一函数 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 是线性函数:

$$f(x)=kx+b.$$

证 $[f(x)-kx]'=f'(x)-k=k-k=0,$

于是,

$$f(x)-kx=b\ (b\text{ 为常数}).$$

故 $f(x)$ 必为线性函数:$f(x)=kx+b$. 证完.

1261. 设 $f^{(n)}(x)=0$,则函数 $f(x)$ 有什么性质?

解 由 $f^{(n)}(x)=0$,于是 $f^{(n-1)}(x)=c$ (c 为常数).

再由 1260 题的结果得知

$$f^{(n-2)}(x)=cx+b.$$

假设

$$f^{(k)}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-k-1}x^{n-k-1},$$

并令

$$\Phi(x) = f^{(k-1)}(x) - \left(a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \cdots + \frac{1}{n-k}a_{n-k-1}x^{n-k}\right),$$

则有 $\Phi'(x) = f^{(k)}(x) - (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-k-1}x^{n-k-1}) = 0.$

由 1259 题知 $\Phi(x) = b_0$，并记 $a_0 = b_1, \frac{1}{2}a_1 = b_2, \cdots, \frac{1}{n-k}a_{n-k-1} = b_{n-k}$，则有

$$f^{(k-1)}(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-k}x^{n-k}.$$

依归纳法便有

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1},$$

它是 $n-1$ 次多项式，其中 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ 是常数，而且是任意的.

1262. 证明：满足方程

$$y' = \lambda y (\lambda = 常数)$$

的唯一函数 $y = y(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ 是指数函数：

$$y = Ce^{\lambda x},$$

其中 C 为任意常数.

证
$$(ye^{-\lambda x})' = y'e^{-\lambda x} - \lambda ye^{-\lambda x} = \lambda ye^{-\lambda x} - \lambda ye^{-\lambda x} = 0,$$

于是，

$$ye^{-\lambda x} = C\ (c\ 为常数)$$

即

$$y = Ce^{\lambda x}.$$

1263. 检验函数

$$f(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+a}{1-ax}$$

及

$$g(x)=\operatorname{arc\,tg}x$$

于范围:(1)$ax<1$ 及(2)$ax>1$ 内有相同的导函数.

推出这些函数间的关系.

解 当 $ax<1$ 或 $ax>1$ 时,

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)^2}\cdot\frac{1-ax+a(x+a)}{(1-ax)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2},$$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2},$$

故有

$$f'(x)=g'(x)\ (ax<1\text{ 或 }ax>1).$$

因此

$$f(x)-g(x)=C_1,\text{当 }ax<1\text{ 时}. \tag{1}$$

$$f(x)-g(x)=C_2,\text{当 }ax>1\text{ 时}, \tag{2}$$

下面确定常数 C_1 与 C_2. 设 $a>0$($a<0$ 情形可类似地讨论).

在(1)中令 $x\to-\infty$,得

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a}+\frac{\pi}{2}=C_1,$$

故 $C_1=\operatorname{arc\,tg}a$. 因此

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x+a}{1-ax}-\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{arc\,tg}a\ (ax<1).$$

在(2)中令 $x\to+\infty$,得

$$-\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{a}-\frac{\pi}{2}=C_2,$$

故 $C_2=\operatorname{arc}\operatorname{tg}a-\pi$. 因此

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x+a}{1-ax}-\operatorname{arc}\operatorname{tg}x=\operatorname{arc}\operatorname{tg}a-\pi$$

$$(ax>1).$$

1264. 证明下列恒等式：

(a) $2\operatorname{arc}\operatorname{tg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x$,

当 $|x|\geqslant 1$；

(б) $3\arccos x-\operatorname{arc}(3x-4x^3)=\pi$, 当 $|x|\leqslant\frac{1}{2}$.

证 (a) 当 $|x|>1$ 时，由于

$$\left(2\operatorname{arc}\operatorname{tg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)'$$

$$=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}$$

$$\cdot\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=0,$$

故

$$2\operatorname{arc}\operatorname{tg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=C_1, \text{当 } x>1 \text{ 时；}$$

$$2\operatorname{arc}\operatorname{tg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=C_2, \text{当 } x<-1 \text{ 时.}$$

下面确定常数 C_1 与 C_2.

令 $x=\sqrt{3}$，代入前一式，得 $C_1=\pi$；

令 $x=-\sqrt{3}$，代入后一式，得 $C_2=-\pi$.

从而当 $|x|\neq 1$ 时，有

$$2\text{arc tg}x + \text{arc sin}\frac{2x}{1+x^2}$$

$$= \begin{cases} \pi, 当 x > 1 时; \\ -\pi, 当 x < -1 时. \end{cases}$$

而当 $|x| = 1$ 时，上式仍然成立．于是，当 $|x| \geqslant 1$ 时，有

$$2\text{arc tg}x + \text{arc sin}\frac{2x}{1+x^2} = \pi\text{sgn}x.$$

(6) 当 $|x| < \frac{1}{2}$ 时，由于

$$[3\text{arc cos}x - \text{arc cos}(3x - 4x^3)]'$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}} \cdot (3 - 12x^2) = 0,$$

故有

$$3\text{arc cos}x - \text{arc cos}(3x - 4x^3) = C \quad \left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right).$$

其中 C 为常数．令 $x = 0$，代入上式，即可求出 $C = \pi$．于是

$$3\text{arc cos}x - \text{arc cos}(3x - 4x^3) = \pi \quad \left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right).$$

由于上式左端的函数在 $x = \frac{1}{2}$ 左连续，在 $x = -\frac{1}{2}$ 右连续，分别取极限即知上式当 $x = \frac{1}{2}$ 和 $x = -\frac{1}{2}$ 时也成立．于是

$$3\text{arc cos}x - \text{arc cos}(3x - 4x^3) = \pi$$

$$\left(|x| \leqslant \frac{1}{2}\right).$$

1265. 证明：若函数 $f(x)$ (1) 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的；(2) 于此线段内有有穷的导函数 $f'(x)$；(3) 非线性函数，则于区间 (a,b) 内至少能找到一点 c，满足

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

作出这个事实的几何解释.

证 当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时，设

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

易知 $F(a) = F(b) = 0$，且当 $a < x < b$ 时，$F(x) \neq 0$(因为 $f(x)$ 为非线性函数). 设在 $c_1(a < c_1 < b)$ 点，$F(c_1) \neq 0$，不妨设 $F(c_1) > 0$，在区间 $[a,c_1]$ 与 $[c_1, b]$ 上分别应用拉格朗日定理，可知存在

$$\xi_1 \in (a,c_1) \text{ 使 } F'(\xi_1) = \frac{F(c_1)-F(a)}{c_1-a} = \frac{F(c_1)}{c_1-a} > 0;$$

$$\xi_2 \in (a,c_1) \text{ 使 } F'(\xi_2) = \frac{F(b)-F(c_1)}{b-c_1} = -\frac{F(c_1)}{b-c_1} < 0.$$

因而，

$$f'(\xi_1) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{1}$$

$$f'(\xi_2) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{2}$$

由此可知：

当 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant 0$ 时，由(1)，

$$|f'(\xi_1)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|;$$

当 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0$ 时，由(2)，

$$|f'(\xi_2)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

于是命题得证．

这个事实的几何意义是：对于一条非直线的连续曲线段（线段上每点都存在不垂直于 Ox 轴的切线），在曲线上至少存在一点 c，使曲线在该点的切线斜率的绝对值大于连接该线段两个端点，$(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 的弦的斜率的绝对值，换句话说，此切线比此弦"陡"，如图 2.39 所示．

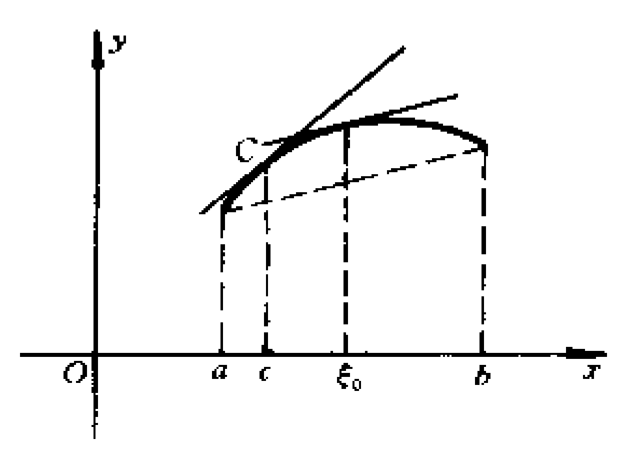


图 2.39

1266. 若函数 $f(x)$：(1) 在区间$[a,b]$上有二阶导函数 $f''(x)$ 及 (2)$f'(a)=f'(b)=0$，则在区间(a,b)内至少存在一点 c，满足

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证 令

$$K = \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

用反证法，即设 $|f''(x)| < K$ $(a<x<b)$.

对于函数(x_0 是$[a,b]$中任意固定的一点)

$$F(x)=f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]$$

及

$$G(x)=(x-x_0)^2,$$

两次应用哥西定理*),即得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$
$$+\frac{1}{2}(x-x_0)^2f''(\xi), \tag{1}$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间(即 $x_0\leqslant\xi\leqslant x$),$x$ 为$[a,b]$中任意点. 特别,在(1)式中取

$$x_0=a, x=\frac{a+b}{2},$$

并利用已知条件 $f'(a)=0$,则有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(c_1),$$

其中 c_1 满足 $a<c_1<\frac{a+b}{2}$.

于是,

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right|<\frac{(b-a)^2}{8}K.$$

同理在(1)式中取 $x_0=b, x=\frac{a+b}{2}$,并利用已知条件 $f'(b)=0$,则得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(c_2),$$

其中$\frac{a+b}{2}<c_2<b$.

于是

$$\left|f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|<\frac{(b-a)^2}{8}K.$$

其中 $x_0 < \xi < x$（以后即将看到，这就是所谓的台劳公式，这里就顺便给了一个关于二阶的台劳公式的另一种推证方法．）

1267．汽车从某点开始行驶，于 t 秒钟内走完了路程，于此时间内经过了距离 s 米．证明汽车运动的加速度的绝对值在某瞬间不小于 $\frac{4s}{t^2}\ \frac{\text{米}}{\text{秒}^2}$．

证　利用 1266 题的结果即可得证．此时

$$s = f(t),$$

$$f(t) - f(0) = s, t - 0 = t.$$

故 $a = \left.\frac{d^2s}{dt^2}\right|_{t=t_1}$ 的绝对值

$$|a| \geqslant \frac{4s}{t^2}.$$

§7．函数的增大与减小．不等式

1° 函数的增大和减小　　若当

$$a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b \text{ 时}, f(x_2) > f(x_1)$$

〔或当 $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ 时，$f(x_2) < f(x_1)$〕，则称函数 $f(x)$ 于闭区间〔a，b〕上增大（或对应地减小）．

若可微分的函数 $f(x)$ 在闭区间〔a，b〕上增大（或减小），则当

$$a \leqslant x \leqslant b \text{ 时}, f'(x) \geqslant 0$$

〔或对应地当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时，$f'(x) \leqslant 0$〕．

2° 函数增大（或减小）的充分条件　若函数 $f(x)$ 在闭区间〔a，b〕上是连续的，并且在其内有正的（或负的）导函数 $f'(x)$，则函数 $f(x)$ 于〔a，b〕内增大（或对应地减小）．

求下列函数在严格意义上的单调（增大或减小）的区间：

1268．$y = 2 + x - x^2$

解　$y' = 1 - 2x$.

当 $-\infty < x < \frac{1}{2}$ 时，$y' > 0$，函数增大；

当 $\frac{1}{2} < x < +\infty$ 时，$y' < 0$，函数减小.

1269. $y = 3x - x^3$.

解　$y' = 3 - 3x^2 = 3(1-x)(1+x)$.

当 $-\infty < x < -1$ 时，$y' < 0$，函数减小；

当 $-1 < x < 1$ 时，$y' > 0$，函数增大；

当 $1 < x < +\infty$ 时，$y' < 0$，函数减小.

1270. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

解　$y' = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$.

当 $-\infty < x < -1$ 时，$y' < 0$，函数减小；

当 $-1 < x < 1$ 时，$y' > 0$，函数增大；

当 $1 < x < +\infty$ 时，$y' < 0$，函数减小.

1271. $y = \frac{\sqrt{x}}{x+100}(x \geqslant 0)$.

解　$y' = \frac{-x+100}{2\sqrt{x}(x+100)^2}$.

当 $0 < x < 100$ 时，$y' > 0$，函数增大；

当 $100 < x < +\infty$ 时，$y' < 0$，函数减小.

1272. $y = x + \sin x$.

解　$y' = 1 + \cos x \geqslant 0$.

当 $-\infty < x < +\infty$ 时，函数增大.

1273. $y = x + |\sin 2x|$.

解　$y' = 1 + 2\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}\cos 2x$

$\left(x \neq \frac{k\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right)$.

当 $x \in \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ 时，$y' > 0$，函数增大；

当 $x \in \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$y' < 0$，函数减小，其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

1274. $y = \cos \frac{\pi}{x}$.

解 $y' = \frac{\pi}{x^2}\sin \frac{\pi}{x}$.

当 $2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi$ 及 $-(2k+2)\pi < \frac{\pi}{x} < -(2k+1)\pi$.

$0 < \frac{\pi}{x} < \pi$ 时，即 $x > 1$，$x \in \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)$ 及 $x \in \left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k+2}\right)$ 时，$y' > 0$，所以函数增大($k = 1, 2, \cdots$).

同理，当 $x \in \left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right)$ 及 $x \in \left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1}\right)$ 时，$y' < 0$，函数减小($k = 1, 2, \cdots$).

1275. $y = \frac{x^2}{2^x}$.

解 $y' = \frac{2x - x^2\ln 2}{2^x}$.

当 $-\infty < x < 0$ 及 $\frac{2}{\ln 2} < x < +\infty$ 时，$y' < 0$，函数减小；

当 $0 < x < \frac{2}{\ln 2}$ 时，$y' > 0$，函数增大.

1276. $y = x^n e^{-x} (n > 0, x \geqslant 0)$.

解 $y' = x^{n-1} e^{-x} (n - x)$.

当 $x \in (0, n)$ 时，$y' > 0$，函数增大；

当 $x \in (n, +\infty)$ 时，$y' < 0$，函数减小.

1277. $y = x^2 - \ln x^2$.

解 $y' = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

当 $-\infty < x < -1$ 及 $0 < x < 1$ 时，$y' < 0$，函数减小；

当 $-1 < x < 0$ 及 $1 < x < +\infty$ 时，$y' > 0$，函数增大.

1278. 若 $x > 0$，$f(x) = x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x\right)$ 及 $f(0) = 0$.

解 $f'(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x + \cos \ln x$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right) (x > 0).$$

令 $f'(x) = 0$，得

$$\sin\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

解上述方程得

$$x = e^{-\frac{11}{12}\pi + 2k\pi}, x = e^{-\frac{7}{12}\pi + 2k\pi}$$

或 $$x = e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi}, x = e^{\frac{17}{12}\pi + 2k\pi}$$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

当 $x \in (e^{-\frac{7}{12}\pi + 2k\pi}, e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi})$ 时，$f'(x) > 0$，

函数增大；

当 $x \in (e^{\frac{13}{12}\pi-2k\pi}, e^{\frac{17}{12}\pi+2k\pi})$ 时，$f'(x)<0$，

函数减小．

1279. 证明：内接于圆的正 n 边形，当边的数目 n 增加时，其周界 P_n 增加，而外切于此圆的正 n 边形的周界 P_n 则减小．利用这点来证明，当 $n\to\infty$ 时，p_n 及 P_n 有相同的极限．

证　如图 2.40 所示，

我们有

$$p_n = 2nx = 2na\sin\alpha = 2na\sin\frac{\pi}{n},$$

$$P_n = 2ny = 2na\,\mathrm{tg}\alpha = 2na\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}.$$

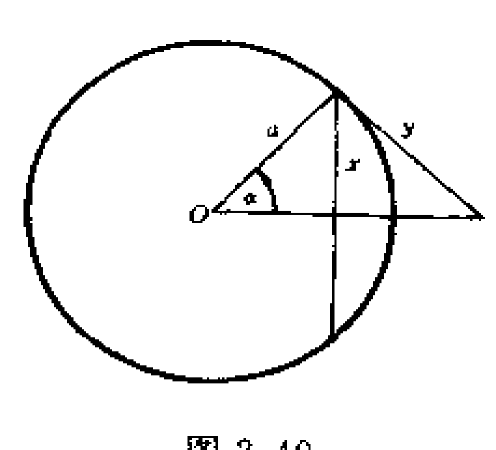


图 2.40

考虑 $f(x)=\frac{2a}{x}\sin\pi x$. 易证当 $x(x>0)$ 很小时有 $f'(x)<0$，从而当 x 变小时 $f(x)$ 增大．所以，$p_n=f\left(\frac{1}{n}\right)$ 当 n 增大时，p_n 逐渐增大．同样，令 $g(x)=\frac{2a}{x}\mathrm{tg}\pi x$，利用 $x<\mathrm{tg}x$（当 x 很小时，$x>0$），可证得 $g'(x)>0$，情形相反，当 x 变小时，$g(x)$ 逐渐减小，故 $P_n=g\left(\frac{1}{n}\right)$ 当 n 变大时逐渐变小．总之，有 $p_n<p_{n+1}$ 及 $P_{n+1}<F_n$，并且显然有 $p_{n+1}<P_{n+1}$. 于是

$$p_n<p_{n+1}<P_{n+1}<P_n,$$

故$\{P_n\}$是有界减数列，$\{p_n\}$是有界增数列，从而它们的极限都存在，但

$$\lim_{n\to\infty}(P_n - p_n)$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2\pi a\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} - \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right) = 0,$$

故有

$$\lim_{x\to+\infty} p_n = \lim_{x\to+\infty} P_n.$$

1280. 证明：函数

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

于区间$(-\infty, -1)$及$(0, +\infty)$内增大．

证 设 $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$，则

$$y' = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right].$$

由于当$x \in (-\infty, -1)$时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x > 0$，因此要看$y'$为正或为负，只需看$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$的正负性．

再设 $z = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$，则

$$z' = -\frac{1}{x(1+x)^2} > 0,\ x \in (-\infty, -1),$$

故当$-\infty < x < -1$时z增大，又$\lim\limits_{x\to-\infty} z = 0$，因而$z > 0$. 于是，在$(-\infty, -1)$内$y' > 0$. 因此，函数

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

在区间$(-\infty, -1)$内增大.

同理可证,函数$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$在区间$(0, +\infty)$内增大.

1281. 证明:有理整函数

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n (n \geqslant 1, a_n \neq 0)$$

于区间$(-\infty, -x_0)$及$(x_0, +\infty)$内是单调的(就严格的意义而言!),其中x_0为充分大的正数.

证 由于

$$P'_n(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + na_n x^{n-1}$$
$$= x^{n-1}\left(na_n + \frac{(n-1)a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}}\right),$$

而

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(n-1)a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}}\right) = 0,$$

故存在$x_0 > 0$,使当$|x| > x_0$时,

$$\left|\frac{(n-1)a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}}\right| < n|a_n|.$$

由此可知,当$-\infty < x < -x_0$或$x_0 < x < +\infty$时$P'_n(x)$均保持定号(例如,若$a_0 > 0$,则当$x_0 < x < +\infty$时,$P'_n(x) > 0$),故$P_n(x)$在$(-\infty, -x_0)$及$(x_0, +\infty)$内都是严格单调的. 证毕.

1282. 证明:有理函数

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$$

$$(m + n \geqslant 1, m \neq n^{*)} a_n b_m \neq 0)$$

于区间$(-\infty,-x_0)$及$(x_0,+\infty)$内是单调的(就严格的意义而言!),其中x_0为充分大的正数.

证 我们有

$$R'(x)=\frac{1}{(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)^2}\{[a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}][b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m]-[b_1+2b_2x+\cdots+mb_mx^{m-1}][a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n]\}$$

$$=\frac{1}{(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)^2}\{(a_1b_0-a_0b_1)+2(a_2b_0-a_0b_2)x+\cdots+[(n-m+1)a_nb_{m-1}-(n-m-1)a_{n-1}b_m]x^{m+n-2}+(n-m)a_nb_mx^{m+n-1}\}$$

$$=\frac{x^{m+n-1}}{(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)^2}\Big[(n-m)a_nb_m+\frac{(n-m+1)a_nb_{m-1}-(n-m-1)a_{n-1}b_m}{x}+\cdots+\frac{a_1b_0-a_0b_1}{x^{m+n-1}}\Big].$$

仿1281题之证法,可知存在$x_0>0$,使当$|x|>x_0$时上式右端方括弧内的式子与第一项$(n-m)a_nb_m$同符号,由此可知,当$-\infty<x<-x_0$或$x_0<x<+\infty$时$R'_*(x)$均保持定号,故$R(x)$在$(-\infty,-x_0)$及$(x_0,+\infty)$中都是严格单调的.

*) 本题应加上条件$m\neq n$(原题上没有). 否则所述结论不成立. 例如,若$m=n$,$a_i=b_i(i=0,1,\cdots,$

n)，则 $R(x)\equiv 1$，它在 $(x_0, +\infty)$ 上显然不是严格单调的．

1283. 单调函数的导函数是否也必为单调的？

解 不．例如函数

$$f(x)=x+\sin x,$$

在区间 $(0,+\infty)$ 内，由于 $f'(x)=1+\cos x>0$（除 $x=(2n+1)\pi, n=0,1,\cdots$），所以它是单调增加的；然而其导函数 $f'(x)$ 却不是单调的．事实上由于 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, f'(\pi)=0, f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=1$，显见并非是单调的．

1284. 证明：若 $\varphi(x)$ 为单调增大的可微分的函数，且当

$x\geqslant x_0$ 时，$|f'(x)|\leqslant\varphi'(x)$，

则当 $x\geqslant x_0$ 时，$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varphi(x)-\varphi(x_0)$．

对这个事实作几何的解释．

证 证法一：

作函数 $\psi(x)=\varphi(x)-f(x)$，由拉格朗日定理知

$$\psi(x)-\psi(x_0)=\psi'(\xi)(x-x_0)\quad(x_0<\xi<x).$$

由 $|f'(x)|\leqslant\varphi'(x)$ 知

$$\psi'(\xi)=\varphi'(\xi)-f'(\xi)\geqslant 0.$$

从而 $\psi(x)-\psi(x_0)\geqslant 0$（当 $x\geqslant x_0$ 时），由此得

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant f(x)-f(x_0). \qquad (1)$$

再令 $\psi_1(x)=\varphi(x)+f(x)$，同理有 $\psi_1(x)-\psi_1(x_0)\geqslant 0$（当 $x\geqslant x_0$ 时），由此得

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant f(x_0)-f(x). \qquad (2)$$

结合(1)和(2)便得

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant|f(x)-f(x_0)|.$$

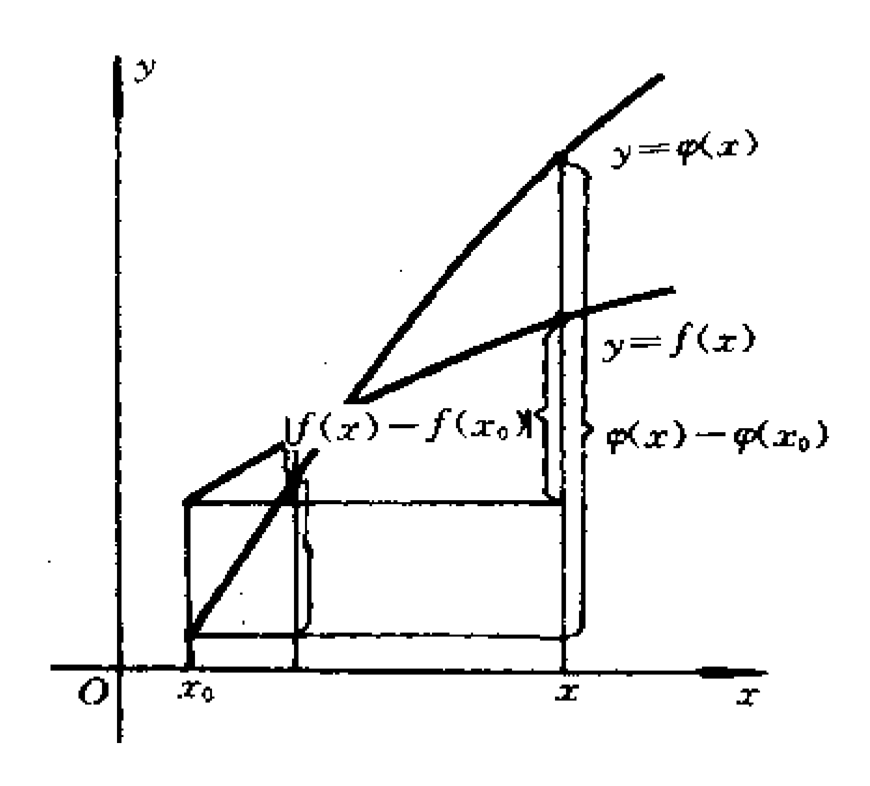


图 2.41

于是，$f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)>0$. 又 $f(a)<0$，故根据连续函数的介值定理知，方程 $f(x)=0$ 在 $\left(a,a-\frac{f(a)}{k}\right)$ 上至少有一实根．又因为当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内严格单调上升，由此可知，方程 $f(x)=0$ 在 $\left(a,a-\frac{f(a)}{k}\right)$ 内恰有一个实根．

1286. 若于某邻域 $|x-x_0|<\delta$ 内，函数增量 $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ 的符号与自变数增量 $\Delta x_0=x-x_0$ 的符号相同，函数 $f(x)$ 称为在 x_0 点增大．

证明：若函数 $f(x)(a<x<b)$ 于有穷或无穷的区间 (a,b) 内的每一点增大，则它在此区间内为增函数．

证　要证对任意两点 $x_1<x_2(a<x_1<x_1<b)$，都有

$f(x_1)<f(x_2)$. 对$[x_1,x_2]$中每一点c,由假定都存在开区间$\Delta_c=(c-\delta_c,c+\delta_c)$使当$0<|x-c|<\delta_c$时,$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$. 于是,诸区间$\{\Delta_c\}$($c$取遍$[x_1,x_2]$形成$[x_1,x_2]$的一个开复盖. 由波内耳有限复盖定理,从$\{\Delta_c\}$中可选出有限个,设为$\Delta_{c_1},\Delta_{c_2}\cdots,\Delta_{c_m}$,它们已经复盖了$[x_1,x_2]$. 不妨设$x_1<c_1<c_2<\cdots<c_m<x_2$,而且可设诸$\Delta_{c_i}$互不包含(因若$\Delta_{c_i}\subset\Delta_{c_j}$,则可将$\Delta_{c_i}$舍去). 于是,必有$x_1\in\Delta_{c_1}$(因若$x_1$不属于$\Delta_{c_1}$,而属于某$\Delta_{c_j}$,$j>1$,则显然有$\Delta_{c_1}\subset\Delta_{c_j}$,此与诸$\Delta_{c_i}$互不包含矛盾). 另外,易知$\Delta_{c_i}$与$\Delta_{c_{i+1}}$($i=1,2,\cdots,m-1$)必有公共点$\bar{x}_i$(因若$\Delta_{c_i}$与$\Delta_{c_{i+1}}$没有公共点,则点$c_i+\delta_{c_i}$必属于某$\Delta_{c_j}$,$j\neq i$,$j\neq i+1$. 若$j<i$,则$\Delta_{c_i}\subset\Delta_{c_j}$,矛盾;若$j>i+1$,则$\Delta_{c_{i+1}}\subset\Delta_{c_j}$,也矛盾). 显然可取公共点$\bar{x}_i$满足$c_i<\bar{x}_i<c_{i+1}$.

于是

$$f(c_i)<f(\bar{x}_i)<f(c_{i+1})\ (i=1,2,\cdots,m-1).$$

同理,可知$x_2\in\Delta_{c_m}$. 于是,我们有

$$f(x_1)<f(c_1)<f(c_2)<\cdots<f(c_m)<f(x_2).$$

证完.

1287. 证明:函数

$$f(x)=x+x^2\sin\frac{1}{x},\text{若 } x\neq 0 \text{ 及 } f(0)=0,$$

于点$x=0$增大,但在含这点的任何区间$(-\varepsilon,\varepsilon)$中并非增大的,其中$\varepsilon>0$为任意小的数. 作出此函数的略

图.

证 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = 1 + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x + \Delta x^2 \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 1 > 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点增大. 又当 $x \neq 0$ 时,

$$f''(x) = 2\sin\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x},$$

$$f''\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = -4n\pi \begin{cases} < 0, n \text{ 为正整数;} \\ > 0, n \text{ 为负整数;} \end{cases}$$

而 $f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 0$. 故 $f(x)$ 在点 $x_n = \frac{1}{2n\pi}(n = 1,2,\cdots)$ 都达极大值. 由于 $x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 内不是增大的(作无穷次振荡, 如图 2.42 所示).

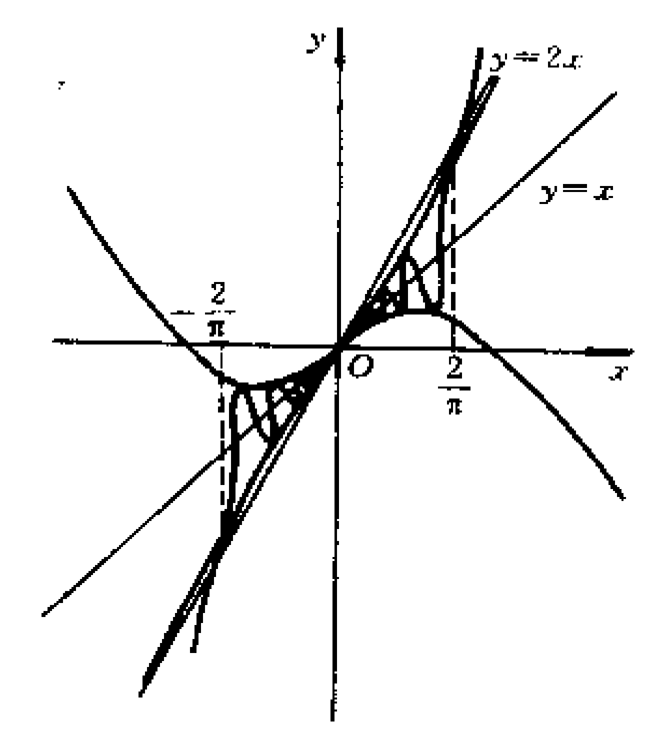


图 2.42

1288. 证明定理:设(1)

函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 可微分 n 次；(2)$\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$；(3) 当 $x > x_0$ 时，$\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$，则当 $x > x_0$ 时有不等式

$$\varphi(x) > \psi(x).$$

证 设 $F(x) = \varphi(x) - \psi(x)$，则由于 $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$，所以

$$F^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(x) > 0 \ (x > x_0).$$

因此 $F^{(n-1)}(x)$ 在 $x > x_0$ 时是严格增大的．另外，由条件(2) 得

$$F^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0) - \psi^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

因此

$$F^{(n-1)}(x) > F^{(n-1)}(x_0) = 0 \ (x > x_0).$$

由此又知 $F^{(n-2)}(x)$ 在 $x > x_0$ 时是严格增大的．再由条件(2)，知

$$F^{(n-2)}(x_0) = \varphi^{(n-2)}(x_0) - \psi^{(n-2)}(x_0) = 0,$$

故

$$F^{(n-2)}(x) > F^{(n-2)}(x_0) = 0 \ (x > x_0).$$

依此类推，最后得

$F(x) > F(x_0) = 0(x > x_0)$，即

$$\varphi(x) > \psi(x) \ (x > x_0).$$

1289. 证明下列不等式：

(а) 当 $x \neq 0$ 时，$e^x > 1 + x$；

(б) 当 $x > 0$ 时，$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$；

(в) 当 $x > 0$ 时，$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$；

(г) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\mathrm{tg}x > x + \frac{x^3}{3}$；

(д) 当 $x > 0, y > 0$ 及 $0 < \alpha < \beta$ 时，

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

作不等式(a)—(г) 的几何解释．

证 (a) 设 $f(x) = e^x - (1 + x)$，则当 $x > 0$ 时，

$$f'(x) = e^x - 1 > 0,$$

所以，$f(x) > f(0) = 0\ (x > 0)$，即

$$e^x > 1 + x\ (x > 0).$$

同理可证，当 $x < 0$ 时，

$$e^x > 1 + x.$$

总之，当 $x \neq 0$ 时，

$$e^x > 1 + x.$$

此不等式的几何意义是，曲线 $y = e^x$ 位于曲线 $y = 1 + x$ 的上方．如图 2.43 所示．

(б) 设 $\varphi(x) = x, \psi(x) = \ln(1 + x)$，则

$$\varphi'(x) = 1, \psi'(x) = \frac{1}{1 + x}.$$

当 $x > 0$ 时，$\varphi'(x) > \psi'(x)$，即 $\varphi'(x) - \psi'(x) > 0$，且有 $\varphi(0) = \psi(0) = 0$，从而

$$\varphi(x) - \psi(x) > \varphi(0) - \psi(0) = 0\ (x > 0),$$

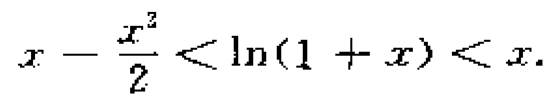
即

$$x - \ln(1 + x) > 0\ (x > 0).$$

同理可证，当 $x > 0$ 时，

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x).$$

所以，当 $x > 0$ 时，



$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x.$$

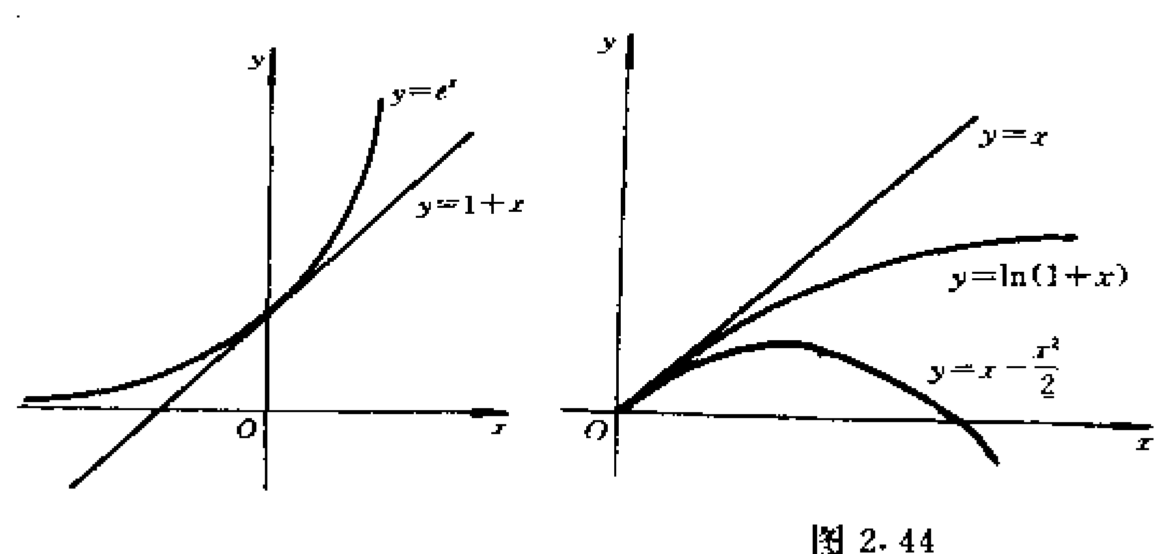


图 2.44

图 2.43

此不等式表示对数函数 $y=\ln(1+x)$ 的图形介于抛物线 $y=x-\frac{x^2}{2}$ 和直线 $y=x$ 之间($x>0$)．如图 2.44 所示．

(в) 令 $F(x)=x-\sin x$,则

$F'(x)=1-\cos x>0$ (当 $x>0,x\neq 2n\pi$,

$n=1,2,\cdots$ 时),

故 $F(x)$ 在 $x>0$ 时是严格增大的．因此,当 $x>0$ 时,有

$$F(x)>F(0)=0,$$

从而

$$x>\sin x\ (x>0).$$

其次再证,$x-\frac{x^3}{6}<\sin x\ (x>0)$．设

$$\psi_1(x)=x-\frac{x^3}{6},\varphi_1(x)=\sin x,$$

则有

$$\psi_1(0) = \varphi_1(0) = 0, \psi'(0) = \varphi'(0) = 1.$$

又因 $\psi''_1(x) = -x, \varphi''_1(x) = -\sin x$，于是，当 $x > 0$ 时，有

$$\varphi''_1(x) > \psi''_1(x).$$

利用 1288 题的结果得知，

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} (x > 0).$$

所以，当 $x > 0$ 时 $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$. 此不等式表示，在 y 轴的右侧，曲线 $y = \sin x$ 介于直线 $y = x$ 和曲线 $y = x - \frac{x^3}{6}$ 之间，如图 2.45 所示．

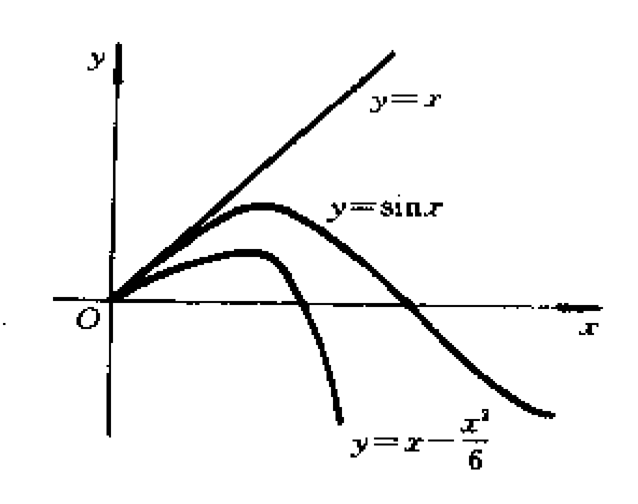


图 2.45

(r) 设 $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$，$\psi(x) = x + \frac{x^3}{3}$，则有

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0;$$

$$\varphi'(x) = \sec^2 x, \psi'(x) = 1 + x^2,$$

$$\varphi'(0) = \psi'(0) = 1;$$

$$\varphi''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}, \psi''(x) = 2x,$$

$$\varphi''(0) = \psi''(0) = 0;$$

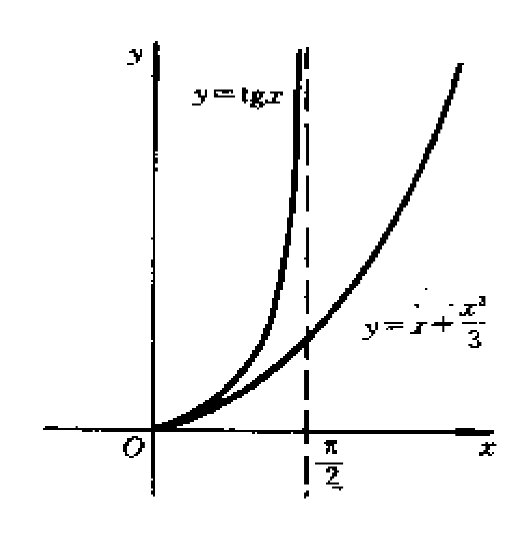
$$\varphi'''(x) = 2(1 + 3\operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x),$$

$$\psi'''(x) = 2,$$

从而当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\varphi'''(x) > \psi'''(x)$.

于是利用 1288 题的结果得知

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\operatorname{tg}x > x + \frac{x^3}{3}$. 此不等式表示，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内，曲线 $y = \operatorname{tg}x$ 在曲线 $y = x + \frac{x^3}{3}$ 的上方．如图 2.46 所示．



2.46

(a) 当 $x = y$ 时，由 $0 < \alpha < \beta$ 知，不等式

$2^{\frac{1}{\alpha}} > 2^{\frac{1}{\beta}} (x > 0, y > 0)$

显然成立．

当 $x \neq y$，且 $x > 0, y > 0$，不妨设 $0 < \frac{y}{x} < 1$.

令 $a = \frac{y}{x}$，为证不等式，只需证明 $f(t) = (1 + a^t)^{\frac{1}{t}}$ 严格递减，也即只要证明函数 $F(t) = \frac{1}{t}\ln(1 + a^t)$ 严格递减．实际上，因为

$$F'(t) = \frac{a^t\ln a}{t(1 + a^t)} - \frac{\ln(1 + a^t)}{t^2}.$$

当 $a^t > 0$ 时，有 $a^t - \frac{a^{2t}}{2} < \ln(1 + a^t)$*)，所以

$$F'(t) = \frac{a^t\ln a}{t(1 + a^t)} - \frac{a^t - \frac{a^{2t}}{2}}{t^2}.$$

由于 $0 < a < 1$ 及 $t > 0$，所以 $\ln a < 0$ 及 $a^t > a^{2t} > \dfrac{a^{2t}}{2}$

从而 $F'(t) < 0$，即 $F(t)$ 是严格递减，从而当 $x \neq y$ 时，不等式

$$(x^{\alpha} + y^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} > (x^{\beta} + y^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}$$

也成立．

作 $f(t) = (1 + a^t)^{\frac{1}{t}}$ 的图形，如图 2.47 所示．对于 $(0, +\infty)$ 内任意两个值 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$，图形上对应点的纵坐标却相应地减小

$$f(\alpha) > f(\beta).$$

*）　利用本题(6)的结果．

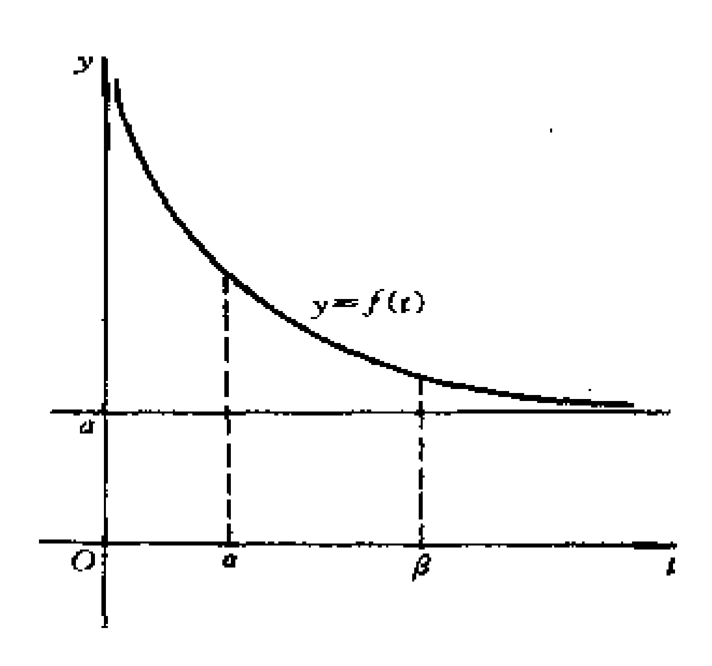


图 2.47

1290．证明不等式

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x,$$

所以，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e\ (x>0).$$

同理可证，当 $x>0$ 时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 严格递减，并且有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=e,$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}>e\ (x>0).$$

1292. 等差级数与等比级数的项的数目相同且有相同的首项与末项，它们的一切项都是正的．证明等差级数各项的和大于或等于*) 等比级数各项的和．

证 证法一：

设等差级数各项为 $a_1,a_2\cdots,a_n$ 公差为 d；等比级数各项为 $b_1,b_2\cdots,b_n$，公比为 q. 记其和为

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}a_k, Q=\sum_{k=1}^{n}b_k.$$

当 $q=1$ 时，由 $a_1=b_1$ 及 $a_n=b_n$ 可知有 $\sigma=Q$.

当 $q<1$ 时，由 $a_1=b_1$ 及 $a_n=a_1+(n-1)d, b_n=b_1q^{n-1}$ 且 $a_n=b_n$ 得知

$$a_1+(n-1)d=b_1q^{n-1},$$

即

$$d=-\frac{1-q^{n-1}}{n-1}a_1(a_1>0).$$

那么有

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n}[a_1 + (k-1)d]$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left[a_1 - \frac{k-1}{n-1}(1-q^{n-1})a_1\right]$$
$$= a_1\left[n - \frac{1}{n-1}(1-q^{n-1})\sum_{l=0}^{n-1}l\right]$$
$$= \frac{n}{2}a_1(1+q^{n-1}),$$
$$Q = \sum_{k=1}^{n}a_1q^{k-1} = a_1\,\frac{1-q^n}{1-q}.$$

研究

$$\frac{2}{a_1}(1-q)(\sigma - Q)$$
$$= n(1-q)(1+q^{n-1}) - 2(1-q^n)$$
$$= n(1-q+q^{n-1}-q^n) - 2(1-q^n)$$
$$= (n-2)(1-q^n) - nq(1-q^{n-2}).$$

作函数

$$\varphi(t) = (n-2)(1-t^n),$$
$$\psi(t) = nt(1-t^{n-2}),$$

则有 $\varphi(1) = \psi(1) = 0, \varphi'(1) = \psi'(1) = -n(n-2)$.
但是

$$\varphi''(t) = -n(n-1)(n-2)t^{n-2},$$
$$\psi''(t) = -n(n-1)(n-2)t^{n-3},$$

当 $0 < t < 1$ 时,有 $\psi''(t) < \varphi''(t)$,利用 1288 题的结果可得,

$$\psi(t) < \varphi(t)\ (0 < t < 1).$$

即当 $q < 1$ 时,$\psi(q) < \varphi(q)$. 从而,

$$\frac{2}{a_1}(1-q)(\sigma-Q)=\varphi(q)-\psi(q)>0.$$

这就证明了 $\sigma>Q$.

当 $q>1$ 时，由 $a_n=b_n$ 得知

$$d=\frac{q^{n-1}-1}{n-1}a_1>0.$$

又

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}[a_1+(k-1)d]$$

$$=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$

$$=\frac{n}{2}a_1(1+q^{n-1}),$$

$$Q=\sum_{k=1}^{n}a_1q^{k-1}=a_1\frac{q^n-1}{q-1}.$$

与上述讨论相同，有

$$\frac{2}{a_1}(q-1)(\sigma-Q)$$

$$=(n-2)(q^n-1)-nq(q^{n-2}-1).$$

作函数

$$\varphi(t)=(n-2)(t^n-1),$$

$$\psi(t)=nt(t^{n-2}-1),$$

则有

$$\varphi(1)=\psi(1)=0,\varphi'(1)=\psi'(1)=n(n-2).$$

而

$$\varphi''(t)=n(n-1)(n-2)t^{n-2},$$

$$\psi''(t)=n(n-1)(n-2)t^{n-3},$$

当 $t>1$ 时，有 $\varphi''(t)>\psi''(t)$，利用 1288 题结果有

$$\varphi(t) > \psi(t).$$

于是当 $q > 1$ 时，便得 $\varphi(q) > \psi(q)$. 因而

$$\frac{2}{a_1}(q-1)(\sigma - Q) = \varphi(q) - \psi(q) > 0.$$

从而完全证明了 $\sigma > Q$.

证法二：

设等差级数的公差为 d，等比级数的公比为 q.

如果 $d = 0$，易见两个级数叙列均为常数叙列，因此其和相等.

如果 $d \neq 0$，不妨设 $d > 0$（否则把末项变为首项，将叙列颠倒即成），由于各项均为正的，所以 $q > 0$.

设首项为 a，则末项为 $a + nd = aq^n$. 考虑函数

$$f(x) = a + xd - aq^x.$$

由于 $f(0) = f(n) = 0$，所以在 $(0, n)$ 内存在一点 c，使得 $f'(c) = 0$，而 $f''(x) = -aq^x\ln^2 q < 0$. 从而

$$f'(x) = d - aq^x\ln q$$

为一递减函数．所以

当 $x < c$ 时，$f'(x) > 0$；

当 $x > c$ 时，$f'(x) < 0$.

从而当 $0 \leqslant x \leqslant n$ 时，$f(x) \geqslant 0$，其中等号当且仅当 $x = 0$ 及 $x = n$ 时成立．特别是，对于 $0 < k < n$，有

$$f(k) = a + kd - aq^k > 0,$$

即

$$a + kd > aq^k.$$

于是，

$$\sum_{k=0}^{n}(a + kd) > \sum_{k=0}^{n} aq^k.$$

*） 原题要求证明“大于”．实际应为“大于或等于”．

1293. 用不等式

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k x+b_k)^2\geqslant 0,$$

其中 $x,a_k,b_k(k=1,2,\cdots n)$ 为实数，来证明哥西—布尼雅柯夫斯基不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

证 由于

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k x+b_k)^2$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)x^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)x+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\geqslant 0,$$

对任何 x 都成立，故上述二次式的判别式不能为正，即

$$4\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2-4\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\leqslant 0,$$

也即，

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

1294. 证明：正数的算术平均数不大于这些数的平方的平均数，即是

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\leqslant\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}.$$

证 利用 1293 题的结果，设

$$a_k=x_k,b_k=\frac{1}{n},$$

则有

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2,$$

所以,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}.$$

1295. 证明:正数的几何平均数不大于这些数的算术平均数,即是

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

证 设 $G_n=(x_1,x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$,

$$A_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

则有

$$(G_n)^n=x_1,x_2\cdots x_n, nA_n=x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

当 $n=2$ 时,我们已有不等式

$$\sqrt{x_1x_2} \leqslant \frac{x_1+x_2}{2}.$$

今假定 $n=k$ 时,有

$$G_k \leqslant A_k,$$

我们来证 $n=k+1$ 时,有

$$G_{k+1} \leqslant A_{k+1}.$$

事实上,

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= (x_1\cdot x_2\cdots x_k\cdot x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \\ &= [(G_k)^k\cdot x_{k+1}]^{\frac{1}{k+1}} \\ &\leqslant (G_k)^{\frac{k}{k+1}}\cdot(x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \\ &\leqslant (A_k)^{\frac{k}{k+1}}\cdot(x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}. \end{aligned}$$

如果我们设

$$f(x) = x^{\alpha} - (1 - \alpha + \alpha x),$$

由 $f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1)\begin{cases} > 0, 当\ 0 < x < 1; \\ 0, 当\ x = 1; \\ < 0, 当\ x > 1, \end{cases}$

故知 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上是严格递增的，而在 $[1,\infty)$ 上是严格递减的．令 $\alpha = \frac{1}{p}$，$1 - \alpha = \frac{1}{q}$，用 $\frac{a}{b}$ 代替 x，于是就有下列不等式：

当 $a > 0, b > 0, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 时

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

令 $A_k = a, x_{k+1} = b, p = \frac{k+1}{k} > 1, q = k + 1 > 1$，且

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{k+1} = 1,$$

所以，

$$(A_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \leqslant \frac{k}{k+1} A_k + \frac{1}{k+1} x_{k+1}.$$

于是，

$$\begin{aligned} G_{k+1} &\leqslant \frac{k}{k+1} A_k + \frac{1}{k+1} x_{k+1} \\ &= \frac{1}{k+1}(kA_k + x_{k+1}) \\ &= \frac{1}{k+1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}) = A_{k+1}. \end{aligned}$$

从而有

$$G_{k+1} \leqslant A_{k+1}.$$

按照数学归纳法得知不等式

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

对于任何的自然数 n 均成立.

1296. 设 a 及 b 为二正数,则由下之等式

$$若\ s \neq 0, \Delta_s(a,b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}},$$

$$\Delta_0(a,b) = \lim_{s\to 0}\Delta_s(a,b)$$

所定义之函数称为正数 a 及 b 之 s 阶平均数.

特别是,当 $s = -1$ 时得调和平均数,当 $s = 0$ 时得几何平均数(试证之!);当 $s = 1$ 时得算术平均数;当 $s = 2$ 时得平方平均数.

证明:(1) $\min(a,b) \leqslant \Delta_s(a,b) \leqslant \max(a,b)$;

(2) 当 $a \neq b$ 时,函数 $\Delta_s(a,b)$ 是变量 s 的增函数;

(3) $\lim\limits_{s\to -\infty} \Delta_s(a,b) = \min(a,b)$;

$\lim\limits_{s\to +\infty} \Delta_s(a,b) = \max(a,b)$.

证 先证当 $s = 0$ 时得几何平均数,由题设知

$$\Delta_0(a,b) = \lim_{s\to 0}\Delta_s(a,b) = \lim_{s\to 0} e^{\frac{1}{s}\ln\frac{a^s+b^s}{2}},$$

研究 $f(x) = \ln\dfrac{a^x + b^x}{2}$ 在 $x = 0$ 点的导数,有

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)\right\}.$$

另一方面,

$$f'(0) = f'(x)\big|_{x=0}$$

$$= \left[\frac{2}{a^x + b^x}\cdot\frac{1}{2}(a^x\ln a + b^x\ln b)\right]\bigg|_{x=0}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln a + \ln b).$$

因此求得

$$\Delta_0(a,b) = e^{f'(0)} = e^{\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = \sqrt{ab},$$

此即几何平均数.

(1) 由于 $2[\min(a,b)]^s \leqslant a^s + b^s$
$\leqslant 2[\max(a,b)]^s$,

所以,

$$\min(a,b) \leqslant \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \max(a,b),$$

即

$$\min(a,b) \leqslant \Delta_s(a,b) \leqslant \max(a,b).$$

(2) 考虑 $\ln\Delta_s(a,b) = \frac{1}{s}\ln\frac{a^s + b^s}{2}$,则

$$\frac{d}{ds}\ln\Delta_s(a,b)$$
$$= -\frac{1}{s^2}\ln\frac{a^s + b^s}{2} + \frac{a^s\ln a + b^s\ln b}{s(a^s + b^s)}$$
$$= \frac{1}{s^2(a^s + b^s)}\Big\{(a^s\ln a^s + b^s\ln b^s)$$
$$- (a^s + b^s)\ln\frac{a^s + b^s}{2}\Big\}.$$

由于 $a^s > 0$,$b^s > 0$,参看 1314 题(в) 的结果知

$$a^s\ln a^s + b^s\ln b^s > (a^s + b^s)\ln\frac{a^s + b^s}{2},$$

所以,$\frac{d}{ds}\ln\Delta_s(a,b) > 0$,即 $\ln\Delta_s(a,b)$ 是严格增函数,由于对数函数的严格单调增加性,故知函数 $\Delta_s(a,b)$ 是变量 s 的严格增函数.

(3) 不妨设 $0 < a < b$. 于是

$$\leqslant |f(x+h)| + |f(x-h)| + \frac{h^2}{2}[|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|]$$
$$\leqslant 2M_0 + h^2 M_2,$$

即

$$M_2 h^2 - 2|f'(x)|h + 2M_0 \geqslant 0.$$

由于此式对任何 h 都成立，故此二次式的判别式必非正：

$$4|f'(x)|^2 - 4M_2(2M_0) \leqslant 0,$$

即

$$|f'(x)|^2 \leqslant 2M_0 M_2$$

由此可得

$$M_1^2 \leqslant 2M_0 M_2.$$

证完．

§8. 凹凸性．拐点

1° 凹的充分条件　若曲线 $y = f(x)(a \leqslant x \leqslant b)$ 的一段，位于其任意一点的切线之上(或之下)，则称这个可微分的函数 $y = f(x)$ 的图形于闭区间$[a,b]$上是凹(或对应地，凸)的．在假设二阶导函数 $f''(x)$ 存在的情况下，当 $a < x < b$ 时不等式

$$f''(x) > 0 \ [\text{或对应地 } f''(x) < 0]$$

成立，为图形是凹(或对应地，凸)的充分条件．

2° 拐点的充分条件　若函数的图形在某点的凹凸性改变，则称此点为拐点．

若在点 x_0，或是 $f''(x_0) = 0$，或是 $f''(x_0)$ 不存在，且当 x 变动经过 x_0 时，$f''(x)$ 变号，则 x_0 便是拐点．

1298. 研究曲线

$$y = 1 + \sqrt[3]{x}$$

于 $A(-1,0)$，$B(1,2)$ 及 $C(0,0)$ 诸点的凹凸性．

解 $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$，$y'' = -\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$.

于 $A(-1,0)$ 点，$y'' = \dfrac{2}{9} > 0$，故在该点附近曲线的图象是凹的；

于 $B(1,2)$ 点，$y'' = -\dfrac{2}{9} < 0$，故在该点附近曲线的图形是凸的；

于$C(0,0)$点附近，y''变号，因此它是拐点．在C点左边$(x<0)$，$y''>0$，曲线是凹的；在C点右边$(x>0)$，$y''<0$，曲线是凸的．注意，当 $x=0$ 时，y'' 不存在．

求下列函数的图象的凹或凸的区域及拐点：

1299. $y = 3x^2 - x^3$.

解 $y' = 6x - 3x^2$，$y'' = 6 - 6x$.

当 $-\infty < x < 1$ 时，$y'' > 0$，故图形是凹的；

当 $1 < x < +\infty$ 时，$y'' < 0$，故图形是凸的；

$x = 1$ 为拐点．

1300. $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}\,(a > 0)$.

解 $y' = -\dfrac{2a^3x}{(a^2+x^2)^2}$，$y'' = -\dfrac{2a^3(a^2-3x^2)}{(a^2+x^2)^3}$.

当 $|x| < \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 时，$y'' < 0$，故图形是凸的；

当 $|x| > \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 时，$y'' > 0$，故图形是凹的；

$x = \pm \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 是拐点．

1301．$y = x + x^{\frac{5}{3}}$

解 $y' = 1 + \dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}, y'' = \dfrac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$.

当 $-\infty < x < 0$ 时，$y'' < 0$，故图形是凸的；

当 $0 < x < +\infty$ 时，$y'' > 0$，故图形是凹的；

$x = 0$ 是拐点(注意，$x = 0$ 时，y'' 不存在)．

1302．$y = \sqrt{1 + x^2}$.

解 $y' = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}, y'' = x(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} > 0$，图形始终呈凹状．无拐点．

1303．$y = x + \sin x$.

解 $y' = 1 + \cos x, y'' = -\sin x$.

当 $2k\pi < x < (2k + 1)\pi$ 时，$y'' < 0$，故图形是凸的；

当 $(2k + 1)\pi < x < (2k + 2)\pi$ 时，$y'' > 0$，故图形是凹的；

$x = k\pi$ 是拐点($k = 0、\pm 1、\pm 2, \cdots$)．

1304．$y = e^{-x^2}$.

解 $y' = -2xe^{-x^2}, y'' = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$.

当 $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y'' < 0$，故图形是凸的；

当 $|x| > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y'' > 0$，故图形是凹的；

$x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 是拐点．

1305．$y = \ln(1 + x^2)$.

解 $y' = \dfrac{2x}{1+x^2}, y'' = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

当 $|x| < 1$ 时，$y'' > 0$，故图形是凹的；

当 $|x| > 1$ 时，$y'' < 0$，故图形是凸的；

$x = \pm 1$ 是拐点．

1306. $y = x\sin(\ln x)\ (x > 0)$.

解 $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$,

$$y'' = \frac{\sqrt{2}}{x}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right).$$

令 $y'' = 0$，得 $x = e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

当 $e^{2k\pi-\frac{3}{4}\pi} < x < e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}$ 时，$y'' > 0$，故图形是凹的；

当 $e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}} < x < e^{2k\pi+\frac{5}{4}\pi}$ 时，$y'' < 0$，故图形是凸的；

$x = e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}$ 是拐点$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

1307. $y = x^x (x > 0)$.

解 $y' = x^x(\ln x + 1)$, $y'' = x^x\left[\dfrac{1}{x} + (1+\ln x)^2\right]$.

当 $x > 0$ 时，$y'' > 0$，故图形始终是凹的．

1308. 证明曲线

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

有位于同一直线上的三个拐点．作出这个函数的图形．

证 $y' = \dfrac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$,

$$y'' = \frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x_1 = -2-\sqrt{3}$，$x_2 = -2+\sqrt{3}$，

$x_3 = 1$，对应的函数值为 $y_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$，

$y_2=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$，$y_3=1$. 由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2+\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \\ 1 & \dfrac{1+\sqrt{3}}{4} & \dfrac{1-\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix}=0$$

所以拐点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 及 $C(x_3,y_3)$ 在一条直线上(图 2.48).

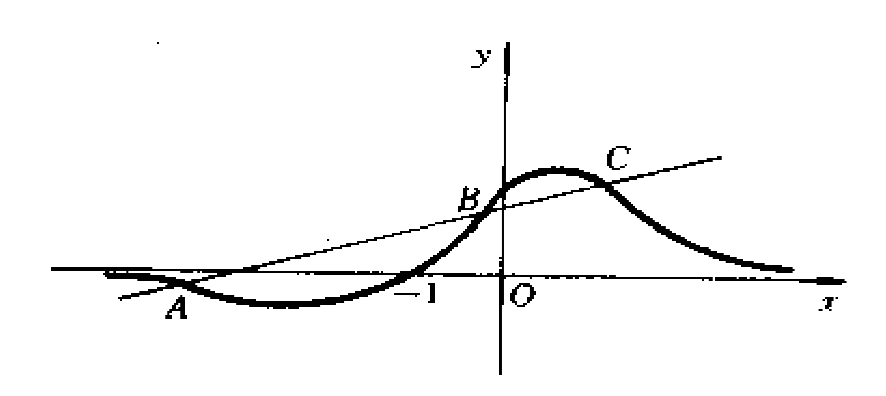


图 2.48

1309. 当如何选择参变数 h 时,"概率曲线"

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}\ (h>0)$$

有拐点 $x=\pm\sigma$?

解 $y'=\dfrac{-2h^3x}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$,

$$y''=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}(4h^4x^2-2h^2).$$

令 $y''=0$，得 $x^2=\dfrac{1}{2h^2}$.

由于拐点为 $x=\pm\sigma$，故有

$$h^2=\frac{1}{2\sigma^2}\text{，即 } h=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\ (\sigma>0).$$

1310. 研究摆线(旋轮线)

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (a>0)$$

的凹凸性。

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x_t'y_t''-x_t''y_t'}{(x_t')^3}$$

$$=-\frac{\csc^2\frac{t}{2}}{2a(1-\cos t)}<0$$

$$(2k\pi<t<2(k+1)\pi,k=0,\pm1,\cdots),$$

故摆线始终呈凸状.

1311. 设函数 $f(x)$ 于区间 $a\leqslant x<+\infty$ 中可微分二次，并且：
(1) $f(a)=A>0$; (2) $f'(a)<0$;
(3) 当 $x>a$, $f''(x)\leqslant 0$.
证明：在区间 $(a,+\infty)$ 内有而且仅有方程 $f(x)=0$ 之一实根.

证 由于 $f'(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上连续且当 $a<x<+\infty$ 时 $f''(x)\leqslant 0$，故函数 $f'(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上是减小的，于是当 $a\leqslant x<+\infty$ 时，必 $f'(x)\leqslant f'(a)<0$；由此又知函数 $f(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上是严格减小的，因此在 $(a,+\infty)$ 上至多有一点使 $f(x)=0$，即在 $(a,+\infty)$ 上方程 $f(x)=0$ 至多有一(实)根.

下面再证明必有点 $a<x_0<+\infty$ 存在，使 $f(x_0)=$

0. 考虑函数 $F(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)(a\leqslant x<+\infty)$，则

$$F'(x)=f'(x)-f'(a),F''(x)=f''(x),$$
$$(a\leqslant x<+\infty).$$

于是当 $a<x<+\infty$ 时 $F''(x)\leqslant 0$，从而 $F'(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上是减小的，但 $F'(a)=0$，故当 $a\leqslant x<+\infty$ 时，$F'(x)\leqslant F'(a)=0$；由此又知 $F(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上是减小的，但 $F(a)=0$，因此当 $a\leqslant x<+\infty$ 时，恒有 $F(x)\leqslant F(a)=0$.

令 $x^*=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$. 由于 $f(a)>0$，$f'(a)<0$，故 $x^*>a$. 很明显

$$F(x^*)=f(x^*)-f(a)-f'(a)\left[-\frac{f(a)}{f'(a)}\right]$$
$$=f(x^*).$$

但上面已证必 $F(x^*)\leqslant 0$，故 $f(x^*)\leqslant 0$. 于是，根据连续函数的中间值定理，知必有 $a<x_0\leqslant x^*$ 存在，使 $f(x_0)=0$. 证毕.

注　上述证明的思路在几何上是明显的. 函数 $F(x)$ 代表曲线 $y=f(x)$（它是凸的）上的纵坐标与在点 $(a,f(a))$ 处的切线 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ 上的纵坐标之差，点 $x^*=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$ 即是此切线与 Ox 轴的交点（图 2.49）.

1312. 若对于区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 与 x_2 及任意二数 λ_1 与 λ_2（$\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_1+\lambda_2=1$）有不等式：

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)<\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$$

〔或对应地，相反的不等式 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$〕，则称函数 $f(x)$ 于区间 (a,b) 上是凹（凸）的.

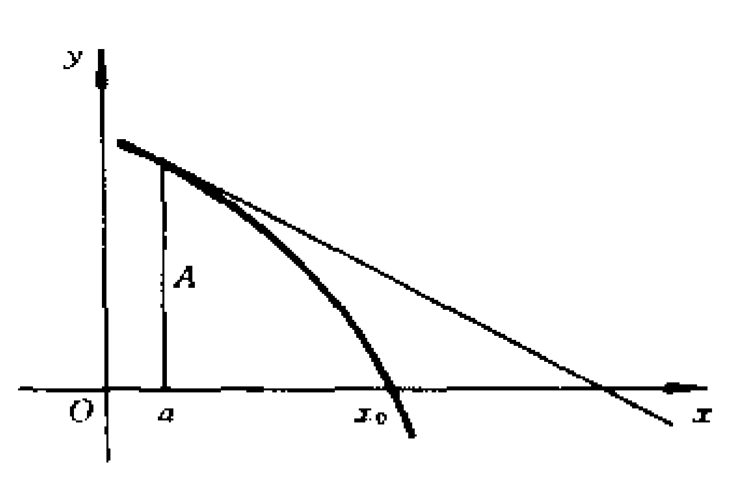


图 2.49

证明：函数 $f(x)$(1) 若当 $a < x < b$ 时，$f''(x) > 0$，则于 (a,b) 上是凹的；(2) 若当 $a < x < b$ 时，$f''(x) < 0$，则于 (a,b) 上是凸的.

证 证法一：

设 x_1, x_2 为 (a,b) 中任意两点，$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. 不妨设 $x_1 < x_2$. 于是 $a < x_1 < x_2 < b$. 考虑 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上的函数 $F(t) = f[(1-t)x_1 + tx_2] - (1-t)f(x_1) - tf(x_2)$. 显然，

$$F(0) = f(x_1) - f(x_1) = 0,$$

$$F(1) = f(x_2) - f(x_2) = 0.$$

利用中值定理得知：当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned} F'(t) &= (x_2 - x_1)f'[(1-t)x_1 + tx_2] \\ &\quad - [f(x_2) - f(x_1)] \\ &= (x_2 - x_1)\{f'[(1-t)x_1 + tx_2] - f'(c)\}, \end{aligned}$$

其中 $x_1 < c < x_2$. 令 $t_0 = \dfrac{c - x_1}{x_2 - x_1}$，则 $0 < t_0 < 1$ 且 $c = (1-t_0)x_1 + t_0 x_2$. 于是 $F'(t_0) = 0$. 此外，当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时，有

$$F''(t)=(x_2-x_1)^2 f''[(1-t)x_1+tx_2].$$

(1) 若 $f''(x)>0(a<x<b)$. 由上式知 $F''(t)>0(0\leqslant t\leqslant 1)$，故 $F'(t)$ 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上是严格增大的，再注意到 $F'(t_0)=0$，即知：当 $0\leqslant t<t_0$ 时 $F'(t)<0$；当 $t_0<t\leqslant 1$ 时，$F'(t)>0$. 由此又知：在 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 上 $F(t)$ 是严格减小的，在 $t_0\leqslant t\leqslant 1$ 上 $F(t)$ 是严格增大的；由此，再用 $F(0)=0, F(1)=0$，即知：当 $0<t<1$ 时，恒有 $F(t)<0$. 特别 $F(\lambda_2)<0$. 但 $F(\lambda_2)=f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)-\lambda_1f(x_1)-\lambda_2f(x_2)$，故

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)<\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2).$$

由此可知 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凹的.

(2) 若 $f''(x)<0(a<x<b)$，则 $F''(t)<0(0\leqslant t\leqslant 1)$. 和(1)情形完全类似地可推知：当 $0<t<1$ 时，恒有 $F(t)>0$. 特别 $F(\lambda_2)>0$，由此即知

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)>\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2),$$

故 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凸的.

证法二：

在 (a,b) 内任取两点 x_1 及 x_2，使 $a<x_1<x_2<b$，并令 $t=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$，则由 $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_1+\lambda_2=1$ 知：$x_1<t<x_2$.

将函数 $f(x)$ 在 $x=t$ 点按1266题题解附注的公式展开，得

$$f(x)=f(t)+(x-t)f'(t)+\frac{1}{2}(x-t)^2f''(\xi), \quad (1)$$

其中 $a<t<\xi<x$ 或 $a<x<\xi<t$. 将 $x=x_1$ 及 $x=x_2$ 代入(1)式，得

所以，函数 $f(x)$ 于区间 (a,b) 上是凸的.

1313. 证明：函数

$$x^n(n>1), e^x, x\ln x$$

于区间 $(0,+\infty)$ 上是凹的；而函数

$$x^n(0<n<1), \ln x.$$

于区间 $(0,+\infty)$ 上是凸的.

证 (1) 设 $y=x^n(n>1)$，则

$$y''=n(n-1)x^{n-2}.$$

它在 $(0,+\infty)$ 上是大于零的，因此图形是凹的.

但当 $0<n<1$ 时，则 $y''<0$，故此时图形是凸的.

(2) 对于函数 e^x，其二阶导函数为 e^x，它始终为正，因此图形是凹的.

(3) 对于函数 $x\ln x$，其二阶导函数为 $\frac{1}{x}$，它在 $(0,+\infty)$ 内大于零，因此图形是凹的.

(4) 对于函数 $\ln x$，其二阶导函数为 $-\frac{1}{x^2}$，它始终为负，因此，在 $(0,+\infty)$ 内图形是凸的.

1314. 证明下列不等式，并解释其几何意义：

(a) $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$，$(x>0,y>0,x\neq y,n>1)$；

(б) $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}(x\neq y)$；

(в) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$

$(x>0,y>0)$.

证　我们已知，若函数 $f(x)$ 的图形在区间 (a,b) 内是凹的，则对于 (a,b) 中的任意两点 x 和 y 满足不等式

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

于是，利用 1313 题的结果，我们有．

(a) 设 $f(x)=x^n$，$(x>0,n>1)$．则其图形是凹的．于是，对于任意两点 x 和 y，得

$$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

(б) 设 $f(x)=e^x$，则在 $(-\infty,+\infty)$ 上图形是凹的．于是，对于任意两点 x 和 y，得

$$\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$$

(в) 设 $f(x)=x\ln x$．则对于 $x>0$ 图形是凹的．于是，对于任意两点 x 和 y，得

$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$$

它们的几何意义是：联接点 $(x,f(x))$ 及 $(y,f(y))$ 的弦的中点始终位于曲线上对应点（具相同横坐标）的上方．

1315. 证明有界的凸的函数处处连续，并有左侧及右侧的导函数．

证　设 $f(x)$ 在 (a,b) 内是凸的，并设 x_0 为 (a,b) 内的任一点，今证 $f(x)$ 在点 x_0 连续，且有左侧及右侧的导数．

在点 x_0 附近取一邻域 $|x-x_0|<\delta$，使得这邻域全部包含在 (a,b) 内，并记

$$M = \min\{f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta)\}.$$

设 $0 < |x - x_0| < \delta$. 记

$$t = \frac{|x - x_0|}{\delta},$$

则 $0 < t < 1$.

当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，有

$$x = t(x_0 + \delta) + (1 - t)x_0$$

及

$$x_0 = \frac{1}{1+t}x + \frac{t}{1+t}(x_0 - \delta).$$

由于 $f(x)$ 为凸函数，故有

$$\begin{aligned} f(x) &> tf(x_0 + \delta) + (1 - t)f(x_0) \\ &\geqslant tM + (1 - t)f(x_0) \end{aligned} \tag{1}$$

及

$$\begin{aligned} f(x_0) &> \frac{1}{1+t}f(x) + \frac{t}{1+t}f(x_0 - \delta) \\ &\geqslant \frac{f(x) + tM}{1+t}. \end{aligned} \tag{2}$$

由(1)，得

$$f(x) - f(x_0) > -t[f(x_0) - M];$$

由(2)，得

$$t[f(x_0) - M] > f(x) - f(x_0).$$

从而 $f(x_0) - M > 0$，且

$$|f(x) - f(x_0)| < t[f(x_0) - M]$$

$$= \frac{[f(x_0) - M]}{\delta} \cdot |x - x_0|. \qquad (3)$$

当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，类似地也可导出(3)式，故当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，(3)式恒成立.

由此显然有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

这就证实了凸函数 $f(x)$ 在点 x_0 的连续性.

记 $x = x_0 + h$，则(3)式可改写为

$$\left|\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right| < \frac{|f(x_0) - M|}{\delta}(0 < |h| < \delta). \qquad (4)$$

引进函数

$$\varphi(h) = f(x_0 + h) - f(x_0)(-\delta < h < \delta).$$

容易验证 $\varphi(h)$ 仍为凸函数，且有 $\varphi(0) = 0$. 今取任意两数 t_1 及 t_2，设有 $0 < t_1 < t_2 < \delta$，并改写为

$$t_1 = \frac{t_1}{t_2} \cdot t_2 + (1 - \frac{t_1}{t_2}) \cdot 0.$$

对于 t_2 与 0 两点可用凸函数性质，有

$$\varphi(t_1) > \frac{t_1}{t_2}\varphi(t_2) + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)\varphi(0)$$

$$= \frac{t_1}{t_2}\varphi(t_2),$$

即

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1} > \frac{\varphi(t_2)}{t_2},$$

这说明函数 $F(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$ 是一个严格单调下降函数. 如

从 $h\to+0$ 方向看，则函数 $F(h)$ 严格单调增大. 但由 (4) 可知 $|F(h)|<\frac{|f(x_0)-M|}{\delta}$，即 $F(h)$ 在 $0<|h|<\delta$ 有界. 故极限 $\lim\limits_{h\to+0}F(h)$ 存在，也即 x_0 的右侧导数

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0)$$

存在. 同理，可证左侧导数 $f'_-(x_0)$ 也存在.

以上讨论中，对于区间是否有穷无关紧要. 证毕.

注　本题不需假定凸函数有界，证明中也未用到有界这个条件，参看 E. C. Titchmarsh，The Theory of Functions，§5.31. 若以较弱的不等式 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)(x_1\neq x_2)$ 作为凸函数的定义，则需加上凸函数有界这个条件，才能推出它连续并且左、右导数都存在. 参看 G. Pólya，G. Szegö，Problems and Theorems in Analysis，Vol. I，70 题和 124 题.

1316. 设函数 $f(x)$ 于区间 (a,b) 内可微分二次，且 $f''(\xi)\neq 0$，其中 $a<\xi<b$. 证明：在区间 (a,b) 中可找出两个值 x_1 与 x_2，满足

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

证　不妨设 $f''(\xi)>0$. 考察 $f'(\xi)$，分两种情形：

(1) 若 $f'(\xi)=0$，则由 $f''(\xi)>0$ 知 $f(\xi)$ 为极小值. 从而存在 $\delta>0$，在 $[-\delta+\xi,\xi+\delta]$（$\subset(a,b)$）上函数 $f(x)$ 在 ξ 的左侧单调下降，在 ξ 的右侧单调上升. 如

果 $f(-\delta+\xi)=f(\xi+\delta)$，则取 $x_1=-\delta+\xi, x_2=\xi+\delta$，就满足了题中的等式．如果 $f(-\delta+\xi)<f(\xi+\delta)$，则取 $x_1=-\delta+\xi$，而在 $[\xi,\xi+\delta]$ 上函数值 $f(x_1)$ 介于 $f(\xi)$ 与 $f(\xi+\delta)$ 之间．由于 $f(x)$ 在 $[\xi,\xi+\delta]$ 上单调上升，故存在 $x_2\in(\xi,\xi+\delta)$，使 $f(x_2)=f(x_1)$，从而题中的等式成立．如果 $f(-\delta+\xi)>f(\xi+\delta)$，仿前也可取得两点 x_1 及 x_2，使 $f(x_1)=f(x_2)$．这时题中的等式得证．

(2) 若 $f'(\xi)\neq 0$，则设

$$F(x)=f(x)-f'(\xi)x,$$

从而有

$$F'(\xi)=f'(\xi)-f'(\xi)=0,$$

且

$$F''(\xi)=f''(\xi)>0.$$

对于函数 $F(x)$，应用上述(1)的推证方法，总存在两点 x_1 及 x_2，使 $F(x_1)=F(x_2)$，也即有

$$f(x_1)-f'(\xi)x_1=f(x_2)-f'(\xi)x_2,$$

解得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

从而命题得证．

1317. 证明：若函数 $f(x)$ 在无穷的区间 $(x_0,+\infty)$ 内可微分两次，且

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0,$$

则在区间 $(x_0,+\infty)$ 内至少有一点 ξ，满足

$$f''(\xi)=0.$$

证 用反证法，即若不存在ξ，使$f''(\xi)=0$，则当$x>x_0$时，或者$f''(x)>0$，或者$f''(x)<0$，如果不是这样，即若存在点a与b，使得$f''(a)<0$及$f''(b)>0$，则由达布定理*）可知，在a与b之间必有c存在，使得$f''(c)=0$，这与我们的反证假设矛盾. 因此我们不妨设$f''(x)>0$，从而函数$f(x)$的图象是凹的，位于其任一点曲线的切线的上方.

再由

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=0,\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

与$f(x)$的可微性，利用1237题的结果，即知：在$(x_0,+\infty)$中至少存在一点c_1，使

$$f'(c_1)=0.$$

由$f''(x)>0$易知$f'(x)$单调上升，从而当$x>c_1$时，$f'(x)>0$. 取$c_2>c_1$，则$f'(c_2)>0$.

过点$(c_2,f(c_2))$作曲线$y=f(x)$的切线，其方程为

$$Y(x)=f(c_2)+f'(c_2)(x-c_2).$$

易知

$$\lim_{x\to+\infty} Y(x)=+\infty,$$

而$f(x)-Y(x)>0$，从而应有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$$

这与原设条件$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$矛盾. 同样，对于$f''(x)<0$的情况也可推得以上结论.

于是，在区间$(x_0,+\infty)$内至少有一点ξ，使

$$f''(\xi)=0.$$

*） 达布定理指：若函数$g(x)$在$[a,b]$内有有限的导

函数，且 $g'(a)g'(b)<0$，则在 (a,b) 内至少有一点 c，使

$$g'(c)=0.$$

其证法是：不妨设 $g'(a)<0, g'(b)>0$，则在 a 右边且与 a 充分近的点 x，有 $g(a)>g(x)$；在 b 左边且与 b 充分近的点 x，有 $g(x)<g(b)$；由此可知 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值必在 (a,b) 内某点 c 达到，从而必有 $g'(c)=0$.

在本题中，可设 $g(x)=f'(x)$，则由 $g'(a)=f''(a)<0$ 及 $g'(b)=f''(b)>0$ 可知在 a 与 b 之间必有 c 存在，使 $g'(c)=0$，即 $f''(c)=0$.

§9. 未定形的求值法

洛比塔第一法则（未定形 $\frac{0}{0}$ 的求值法）若(1) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 a 点的某邻域 U_ϵ * 内有定义并且是连续的（此处 a 为数字或符号 ∞），并且当 $x\to a$ 时，这两个函数都趋近于零：

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0;$$

(2) 在 a 点的邻域 U_ϵ 内，除 a 点而外，在其余各点导函数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在，并且当 $x\neq a$ 时，二者不同时为零；(3) 有限或无穷的极限值 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

---

* 所谓 a 点的邻域 U_ϵ 系指适合于不等式

(1) $|x-a|<\epsilon$，若 a 为一个数

及

(2) $|x|>\frac{1}{\epsilon}$，若 a 为符号 ∞，x 的集合.

洛比塔第二法则（不定形$\frac{\infty}{\infty}$的求值法）若：(1) 当 $x \to a$ 时，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 二者都趋于无穷大：

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

其中 a 为有限数或符号 ∞；

(2) 对于属于 a 点的邻域 U，而异于 a 的一切 x 值，导函数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在，并且当 $x \in U$，及 $x \neq a$ 时，

$$f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0.$$

(3) 有限或无穷的极限

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在，则

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

利用代数变形与取对数的方法，可使未定形 $0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^∞，0^0 等的求值法化为前面两个类型的未定形：

$$\frac{0}{0} \text{ 与 } \frac{\infty}{\infty}$$

的求值法.

求出下列各式之值：

1318. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

解 $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0} \frac{a\cos ax}{b\cos bx} = \frac{a}{b}\ (b \neq 0).$$

1319. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x + \sin x}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x + \cos x}{2} = 1.$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+2\frac{x}{\mathrm{tg}x}+\left(\frac{x}{\mathrm{tg}x}\right)^2}=-\frac{1}{3}.$$

1324.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}x}-1}{2\sin^2x-1}.$$

解 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}x}-1}{2\sin^2x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{\mathrm{tg}^2x}}\sec^2x}{4\sin x\cos x}=\frac{1}{3}.$$

1325. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1+xe^x-2e^x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x+xe^x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x+e^x+xe^x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{6}=\frac{1}{6}.$$

1326. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\sin t+t\cos t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\frac{t}{\sin t}\cos t}=\frac{1}{2}.$$

1327. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc}\sin 2x-2\operatorname{arc}\sin x}{x^3}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{arc sin}2x-2\text{arc sin}x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left[\dfrac{4x}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]}{6x}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left[\frac{4}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=1.$$

1328. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\,\text{arc tg}\sqrt{\dfrac{x}{a}}-\sqrt{b}\,\text{arc tg}\sqrt{\dfrac{x}{b}}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\,\text{arc tg}\sqrt{\dfrac{x}{a}}-\sqrt{b}\,\text{arc tg}\sqrt{\dfrac{x}{b}}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{a}}{1+\dfrac{x}{a}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{b}}{1+\dfrac{x}{b}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{b}\sqrt{x}}}{\dfrac{3}{2}\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{a}{x+a}-\dfrac{b}{x+b}}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{a}{(x+a)^2}+\dfrac{b}{(x+b)^2}}{3}$$

$$=\frac{a-b}{3ab}(ab\neq 0).$$

1329. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a^x-\cos x\cdot a^{\sin x})\ln a}{3x^2}$

$$= \frac{\ln a}{3} \lim_{x \to 0} \frac{a^x \ln a + \sin x \cdot a^{\sin x} - \cos^2 x \cdot a^{\sin x} \ln a}{2x}$$

$$= \frac{\ln a}{6} \lim_{x \to 0} (a^x \ln^2 a + \cos x \cdot a^{\sin x} + \sin x \cos x \cdot a^{\sin x} \ln a$$

$$+ \sin 2x \cdot a^{\sin x} \ln a - \cos^3 x \cdot a^{\sin} \ln^2 a)$$

$$= \frac{\ln a}{6} (a > 0).$$

1330. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right)$.

解 $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{x^x (\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^x (\ln x + 1)^2 + x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = -2.$$

1331. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

解 $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} = \lim_{x \to 0} \frac{a \sin bx \cos ax}{b \sin ax \cos bx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}{}^{*)} = 1.$

*) 利用 1318 题的结果.

1332. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

解 $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \lim_{x \to 0} \frac{a \operatorname{tg} ax}{b \operatorname{tg} bx}$

$$= \frac{a}{b} \lim_{x \to 0} \frac{a \sec^2 ax}{b \sec^2 bx} = \left(\frac{a}{b} \right)^2 (b \neq 0).$$

1333. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x\cdot\sin(\sin x)+\sin x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin(\sin x)-\cos^2 x\cos(\sin x)+\cos x}{12x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{24x}\Big[\cos x\sin(\sin x)+\frac{1}{2}\sin 2x\cos(\sin x)$$

$$+\sin 2x\cos(\sin x)+\cos^3 x\sin(\sin x)-\sin x\Big]$$

$$=\frac{1}{24}\lim_{x\to 0}\Big[-\sin x\sin(\sin x)+\cos^2 x\cos(\sin x)$$

$$+3\cos 2x\cos(\sin x)-\frac{3}{2}\cos x\sin 2x\sin(\sin x)$$

$$-3\cos^2 x\sin x\sin(\sin x)+\cos^4 x\cos(\sin x)-\cos x\Big]$$

$$=\frac{1}{6}.$$

1334. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{th}x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{th}x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{\operatorname{th}^2 x}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\operatorname{sh}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}2x-\sin 2x}{\sin 2x\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{sh}2x\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}2x-\cos 2x}{\cos 2x\operatorname{sh}^2 x+\sin 2x\operatorname{sh}2x+\operatorname{ch}2x\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\text{sh}2x + 2\sin 2x}{-2\sin 2x\,\text{sh}^2 x + 3\cos 2x\,\text{sh}2x + 3\sin 2x\,\text{ch}2x + 2\text{sh}2x\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}(4\text{ch}2x + 4\cos 2x)(-4\cos 2x\,\text{sh}^2 x$$

$$-2\sin 2x\,\text{sh}2x - 6\sin 2x\,\text{sh}2x + 6\cos 2x\,\text{ch}2x$$

$$+6\cos 2x\,\text{ch}2x + 6\sin 2x\,\text{sh}2x + 4\text{ch}2x\sin^2 x$$

$$+2\sin 2x\,\text{sh}2x)^{-1}$$

$$= \frac{2}{3}.$$

1335. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{ar sh}(\text{sh}x) - \text{ar sh}(\sin x)}{\text{sh}x - \sin x}$,

其中 $\text{ar sh}x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{ar sh}(\text{sh}x) - \text{ar sh}(\sin x)}{\text{sh}x - \sin x}$,

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\text{sh}x + \text{ch}x) - \ln(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})}{\text{sh}x - \sin x},$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\text{ch}x + \text{sh}x}{\text{sh}x + \text{ch}x} - \dfrac{\cos x + \dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}}{\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}}}{\text{ch}x - \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}}{\text{ch}x - \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\left(\dfrac{-\sin x\sqrt{1+\sin^2 x} - \dfrac{\cos^2 x\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}}{1+\sin^2 x}\right)}{\text{sh}x + \sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{2\sin x}{(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}}{\text{sh}x + \sin x}$$

$$= 2\lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\cos x}{(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{3\sin^2 x \cos x}{(1+\sin^2 x)^{\frac{5}{2}}}}{\text{ch}x + \cos x}$$

$$= 1.$$

1336. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} (\varepsilon < 0)$.

解 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon - 1}} = 0.$

1337. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} (a > 0, n > 0)$.

解 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{nx^{n-1}}{ae^{ax}} = \cdots = \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{a^n e^{ax}} = 0.$

以上是就 n 为正整数的情形解得的. 若 n 不是正整数，则

$$[n] < n < [n] + 1.$$

于是，

$$\frac{x^{[n]}}{e^{ax}} < \frac{x^n}{e^{ax}} < \frac{x^{[n]+1}}{e^{ax}} (x > 1).$$

而左右两端当 $x \to +\infty$ 时，上面已证明它们的极限为零. 因此，中间的极限也为零. 于是，对于任意大于零的实数 a 和 n，均有

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = 0.$$

1338. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim\limits_{\frac{1}{x^2}\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{50}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\overset{*)}{=}0.$

*） 利用 1337 题的结果.

1339. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-0.01x}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-0.01x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{0.01x}}\overset{*)}{=}0.$

*） 利用 1337 题的结果.

1340. $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$.

解 $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)=\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}$

$=\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{x\ln^2 x}}=\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x\ln^2 x}{1-x}$

$=\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{\ln^2 x+2\ln x}{-1}=0.$

1341. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x\quad(\varepsilon>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}}$

$=-\lim\limits_{x\to+0}\frac{x^{\varepsilon}}{\varepsilon}=0.$

1342. $\lim\limits_{x\to+0}x^x$.

解 $\lim\limits_{x\to+0} x^x = \lim\limits_{x\to+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln x} = e^0 \text{ *)} = 1.$

*） 利用 1341 题的结果.

1343. $\lim\limits_{x\to+0} x^{x^x-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to+0} x^{x^x-1} = \lim\limits_{x\to+0} e^{(x^x-1)\ln x} = \lim\limits_{x\to+0} e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x}$。

由于

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = 0 \text{ *)}, \lim_{x\to+0} \frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x} = 1$$

及

$$\lim_{x\to+0}(x\ln^2 x) = \lim_{x\to+0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{2}{x}\ln x}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+0}(-2x\ln x) = 0,$$

故

$$\lim_{x\to+0}\{(e^{x\ln x}-1)\ln x\}$$

$$= \lim_{x\to+0}\left\{\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot x\ln^2 x\right\} = 1\cdot 0 = 0.$$

于是,

$$\lim_{x\to+0} x^{x^x-1} = \lim_{x\to+0} e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x} = e^0 = 1.$$

*） 利用 1341 题的结果.

1344. $\lim\limits_{x\to+0}(x^{x^x}-1)$.

解 $\lim\limits_{x\to+0}(x^{x^x}-1)=\lim\limits_{x\to+0}(e^{x^x\ln x}-1)$.

利用 1342 题的结果，有

$$\lim_{x\to+0}x^x=1,$$

故得

$$\lim_{x\to+0}e^{x^x\ln x}=0,$$

从而有

$$\lim_{x\to+0}(x^{x^x}-1)=-1.$$

1345. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{k}{1+\ln x}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{k}{1+\ln x}\ln x=k\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=k,$$

所以

$$\lim_{x\to+0}x^{\frac{k}{1+\ln x}}=e^k.$$

1346. $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1,$$

所以

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = e^0 = 1.$$

1350. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln \frac{1}{x}\right)^x$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to +0} x \ln\left(\ln \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y\to +\infty} \frac{\ln(\ln y)}{y}$

$$= \lim_{y\to +\infty} \frac{1}{y\ln y} = 0,$$

所以

$$\lim_{x\to +0}\left(\ln \frac{1}{x}\right)^x = e^0 = 1.$$

1351. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{(1+2x)^2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \cdot \cos^2 \frac{\pi x}{2x+1}}$$

$$= 2\pi \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{(1+2x)^2}}{\sin \frac{2\pi x}{2x+1}}$$

$$= 2\pi \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{4}{(1+2x)^3}}{\frac{2\pi}{(1+2x)^2}\cos \frac{2\pi x}{2x+1}}$$

$$= -4 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(1+2x)\cos \frac{2\pi x}{2x+1}}$$

$$= 0.$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

1352. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}$.

解 由于

$$\lim_{x\to a}\operatorname{ctg}(x-a)\ln\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}\right) = \lim_{x\to a}\frac{\ln\operatorname{tg}x - \ln\operatorname{tg}a}{\operatorname{tg}(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\sec^2 x}{\sec^2(x-a)} = \frac{2}{\sin 2a},$$

所以

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)} = e^{\frac{2}{\sin 2a}}\left(a \neq \frac{k\pi}{2}, k\text{ 为整数}\right).$$

1353. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a^x - x\ln a) - \ln(b^x - x\ln b)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(a^x-1)\ln a}{a^x - x\ln a} - \frac{(b^x-1)\ln b}{b^x - x\ln b}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{a^x\ln^2 a(a^x - x\ln a) - (a^x-1)^2\ln^2 a}{(a^x - x\ln a)^2}\right.$$

$$\left. - \frac{b^x\ln^2 b(b^x - x\ln b) - (b^x-1)^2\ln^2 b}{(b^x - x\ln b)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b),$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln^2 a - \ln^2 b}{2}}.$$

1354. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(x + 2)} = \frac{1}{2}.$$

1355. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x - \ln x - 1}{(x - 1)\ln x}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{x - 1}{x} + \ln x}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x - 1}{(x - 1) + x\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1 + 1 + \ln x} = \frac{1}{2}$$

1356. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = 0.$$

1357. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})} - \frac{1}{\ln(1 + x)}\right]$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x)\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{1+x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1-x}{\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+(1+x)\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1}{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+1+\ln(1+x)}$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

1358. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}\ (a>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(a^x\ln a-ax^{a-1})=a^a(\ln a-1)$.

1359. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]$$

$$= e \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$$

$$= e \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}}{2x}$$

$$= -e \lim_{x \to 0} \frac{1}{2(1+x)^2} = -\frac{e}{2}.$$

1360. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} \ (a > 0).$

解 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(a+x)^x \left[\ln(a+x) + \frac{x}{a+x}\right] - a^x \ln a}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left\{ (a+x)^x \left[\ln(a+x) + \frac{x}{a+x}\right]^2 \right.$$

$$\left. + (a+x)^x \left[\frac{1}{a+x} + \frac{a}{(a+x)^2}\right] - a^x \ln^2 a \right\}$$

$$= \frac{1}{a}.$$

1361. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} x\right)^x.$

解 由于

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} x\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2 \operatorname{arc\,tg} x} \cdot \frac{2}{\pi(1+x^2)}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)\mathrm{arctg}x}=-\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{arc\ tg}x\right)^x=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

1362. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{th}x)^x$.

解 由于

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln(\mathrm{th}x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{th}x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\mathrm{th}x\mathrm{ch}^2x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{sh}2x}=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2\mathrm{ch}2x}$$

$$=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\mathrm{sh}2x}=0.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{th}x)^x=e^0=1.$

1363. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\mathrm{arc\ sin}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\arcsin x)-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sqrt{1-x^2}\mathrm{arc\ sin}x}{2x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{arc\ sin}x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{arc\ sin}x}{\left(4x\sqrt{1-x^2}-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{arc\ sin}x+2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{2(2-3x^2)\arcsin x+2x\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-12x\arcsin x+\dfrac{2(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}+2\sqrt{1-x^2}-\dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\frac{1}{6},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{6}}.$$

1364. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

1365. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}=-\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

1366. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x-\ln\mathrm{ch}x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\mathrm{tg}x-\mathrm{th}x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sec^2 x-\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}}{2}=-1,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-1}.$$

1367. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\mathrm{ch}x}{\sqrt[m]{\mathrm{ch}x}-\sqrt[n]{\mathrm{ch}x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\mathrm{ch}x}{\sqrt[m]{\mathrm{ch}x}-\sqrt[n]{\mathrm{ch}x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{th}x}{\mathrm{sh}x\left[\frac{1}{m}(\mathrm{ch}x)^{\frac{1}{m}-1}-\frac{1}{n}(\mathrm{ch}x)^{\frac{1}{n}-1}\right]}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}=\frac{mn}{n-m}(n\neq m),$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x}-\sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}=\frac{mn}{n-m}.$$

1368. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{cth} x}$.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^x)-\ln 2}{\operatorname{th} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}=\frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{cth} x}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

1369.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right].$$

解 当 $x\to+\infty$ 时，有

$$\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}=x\left[1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$=x\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)+o\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$=x+\frac{1}{3}+o\left(\frac{1}{x}\right)+o(1)=x+\frac{1}{3}+o(1),$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=x\left[1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=x\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)+o\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$=x+\frac{1}{2}+o\left(\frac{1}{x}\right)+o(1)=x+\frac{1}{2}+o(1)$$

并注意到 $x^{\frac{1}{x}} \to 1$，于是得

$$(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}} = (x+a)(x+a)^{\frac{1}{x}}-x\cdot x^{\frac{1}{x+a}}$$

$$= (x+a)\cdot x^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{x}} - x\cdot x^{\frac{1}{x}}x^{\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}}$$

$$= x^{\frac{1}{x}}\left\{(x+a)\left[1+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]-x\left[1+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right\}$$

$$= x^{\frac{1}{x}}\{[x+a+o(1)]-[x+o(1)]\}$$

$$= x^{\frac{1}{x}}[a+o(1)],$$

从而有

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left\{x^{\frac{1}{x}}[a+o(1)]\right\}=a.$$

1371. 若当 $x\to 0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 通过坐标原点(0，0)$[\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0]$，且在此有斜角 α，求

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}.$$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=\mathrm{tg}\alpha$ *).

*) 所谓有斜角 α 是指在 $x=0$ 点有 $f'(0)=\mathrm{tg}\alpha$，注意到当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 0$，以及 $f'(0)$ 存在，如果再假定 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续，则也可用洛比塔法则求得

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y'}{1}=f'(0)=\mathrm{tg}\alpha.$$

1372. 若当 $x\to +0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 通过坐标原点(0，

$0)[\lim\limits_{x\to+0}f(x)=0]$，并且当 $0<x<\varepsilon$ 时，此曲线完全是在两直线 $y=-kx$ 及 $y=kx(k\neq\infty)$ 所组成的锐角之内，证明

$$\lim_{x\to+0}x^{f(x)}=1.$$

证 当 $x\to+0$ 时，有 $x\ln x\to0$. 按题设应有

$$-kx\leqslant f(x)\leqslant kx\quad(k>0,0<x<\varepsilon),$$

而当 $x>0$ 且很小时，有 $\ln x<0$，故

$$kx\ln x<f(x)\ln x<-kx\ln x,$$

从而有

$$e^{kx\ln x}<e^{f(x)\ln x}<e^{-kx\ln x}.$$

当 $x\to+0$ 时，不等式两端均趋于 $e^0=1$，注意到 $e^{f(x)\ln x}=x^{f(x)}$，即有

$$\lim_{x\to+0}x^{f(x)}=1.$$

1373. 证明：若函数 $f(x)$ 的二阶导函数 $f''(x)$ 存在，则

$$f''(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

证 当 $h\to0$ 时，$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\to0$ 及 $h^2\to0$，且分子、分母（视为 h 的函数）都有导数，又注意到分母的导数 $2h\neq0(h\to0$ 但 $h\neq0)$，故对 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ 可用洛比塔法则，并

且继续运算，最后得证

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f''(x)+f''(x)]=f''(x).$$

1374. 研究运用洛比塔法则于下列各例的可能性：

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$；　　(б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$；

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$；

(г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}$.

解　(a) 分子、分母分别求导数，得商为

$$\frac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x},$$

此函数当 $x\to 0$ 时，极限不存在，因此洛比塔法则不能适用. 但是，原极限是存在的. 事实上，函数

$$\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x},$$

当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{x}{\sin x}\to 1$ 及 $x\sin\dfrac{1}{x}\to 0$，于是，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=0.$$

(б) 分子、分母分别求导数，得商为

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x},$$

当 $x\to\infty$ 时，上述函数的极限不存在，因此洛比塔法则不能适用. 但是，原极限是存在的，事实上，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=1.$$

(в) 如果运用洛比塔法则，就有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5e^{-2x}\sin x-2xe^{-x^2}\sin^2 x+e^{-x^2}\sin 2x}{-2e^{-x}\sin x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{2}e^{-x}+xe^{-x^2+x}\sin x-e^{-x^2+x}\cos x\right)=0.$$

这个结果是错误的. 事实上，若取 $x_n=n\pi+\dfrac{3\pi}{4}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=+\infty$. 对于叙列 $\{x_n\}$，原式的分母 $e^{-x_n}\cdot(\cos x_n+\sin x_n)=\sqrt{2}e^{-x_n}\sin\left(x_n+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{-\left(n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)}\cdot\sin(n+1)\pi=0$，而分子不为零，此时原式的极限不存在，从而对于 $x\to+\infty$，原式的极限不存在. 原因是在求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 时，虽然 $f(x)$ 及 $g(x)$ 均连续且极限为

零，但其导函数在点列 $x^{(n)}=n\pi(n=1,2,\cdots)$ 上两者同时出现了零点. 因此，一方面本题不符合运用洛比塔法则的条件；另一方面也不允许在求极限过程中，用 $\sin x$ 作除数，上、下同时约分后再求极限.

(г) 如果运用洛比塔法则，就有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos 2x}{e^{\sin x}[1+\cos 2x+\cos x\cdot(x+\sin x\cos x)]}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cos^2 x}{e^{\sin x}[2\cos^2 x+\cos x\cdot(x+\sin x\cos x)]}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{\sin x}\left[1+\frac{1}{2\cos x}(x+\sin x\cos x)\right]}.
\end{aligned}
$$

由于

$$
e^{\sin x}\geqslant e^{-1},x+\sin x\cos x\geqslant x-1,
$$

故当 $x>1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
&\left|e^{\sin x}\left[1+\frac{1}{2\cos x}(x+\sin x\cos x)\right]\right|\\
&\geqslant e^{-1}\left[\frac{1}{2|\cos x|}(x-1)-1\right]\\
&\geqslant e^{-1}\left[\frac{1}{2}(x-1)-1\right]\to+\infty(\text{当 } x\to+\infty \text{ 时}),
\end{aligned}
$$

从而得

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}=0.
$$

这个结果是错误的.事实上,对于不同的叙列:

$$x_n' = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 及 } x_n'' = 2n\pi (n = 1,2,\cdots),$$

让 $n \to +\infty$,则分别取不同的极限 $\frac{1}{e}$ 及 1,从而原极限是不存在的.原因与(в)的情况类似,只是注意到 $\cos x$ 在 $x^{(n)} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 的点列上($n = 1,2,\cdots$)取值为零.因此,本题不符合运用洛比塔法则的条件;当然也不允许在中间过程里,用 $\cos x$ 作除数,上、下约分后再求极限.

1375. 设有一弓形,其弦为 b,矢为 h,又有内接于此弓形之内的等腰三角形,若当 R 不变时弓形的弧趋于零,求弓形面积与内接等腰三角形面积之比.利用所得之结果推出计算弓形面积之近似公式:

$$S \approx \frac{2}{3}bh.$$

解 如图 2.50 所示. $AB = b, DC = h$, $\angle AOB = \alpha$, $\triangle ABC$ 为内接等腰三角形,其面积为

图 2.50

$$\frac{1}{2}bh = R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin\alpha\right).$$

弓形面积为$\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$

当弧长趋于零时，α 趋于零，于是，弓形面积与内接等腰三角形面积之比为

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)}{R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin\alpha\right)}$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)}{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\right)} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}}$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\frac{3\alpha}{4}\cdot\frac{\alpha}{4}} = \frac{4}{3}.$$

由此得弓形面积的近似公式为

$$S \approx \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}bh = \frac{2}{3}bh.$$

§ 10. 台劳公式

1° **台劳局部公式**　若(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域 $|x - x_0| < \varepsilon$ 内有定义；(2) 于此邻域内有一直到 $(n-1)$ 阶的导函数 $f'(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$；(3) n 级导函数 $f^{(n)}(x_0)$ 于 x_0 点存在，则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o(|x - x_0|^n), \qquad (1)$$

其中　　$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(k = 0, 1, \cdots, n).$

特例，当 $x_0 = 0$ 时，有：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(|x|^n). \qquad (2)$$

在所示的条件下，(1) 式是唯一的.

从台劳局部公式(2)，得出下列五个重要的展开式：

Ⅰ. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$；

Ⅱ. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$；

Ⅲ. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$；

Ⅳ. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 +$

$$\cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n);$$

Ⅴ. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

2° **台劳公式**　若函数 $f(x)$ (1) 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义；(2) 在此闭区间上有连续的导函数 $f'(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$；(3) 当 $a < x < b$ 时，有有限值的导函数 $f^{(n)}(x)$，则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}[a + \theta(x-a)]}{n!}(x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

(拉格朗日余项公式)，或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta_1(x-a))}{(n-1)!}(1-\theta_1)^{n-1}(x-a)^n$$

$$(0 < \theta_1 < 1)$$

(哥西余项公式).

1376. 将多项式

$$P(x)=1+3x+5x^2-2x^3$$

表成二项式 $x+1$ 的正整数乘幂多项式.

解 $P'(x)=3+10x-6x^2$， $P'(-1)=-13$.

$P''(x)=10-12x$， $P''(-1)=22$.

$P'''(x)=-12$， $P'''(-1)=-12$.

$P^{(4)}(x)=0$， $P(-1)=5$.

按台劳公式有

$$P(x)=P(-1)+\frac{P'(-1)}{1!}(x+1)$$

$$+\frac{P''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3+$$

$R_4(x)$，

这里 $R_4(x)=0$，即展开式中的余项为零，将上述结果代入，即得

$$P(x)=5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3$$

按变数 x 的正整数乘幂，写出下列函数的展开式至含有指出阶数的项：

1377. $\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 到含 x^4 的项. $f^{(4)}(0)$ 等于甚么？

解 $\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}=(1+x+x^2)\dfrac{(1+x)}{1+x^3}$

$$=(1+x)(1+x+x^2)\cdot[1-x^3+o(x^6)]$$

于是

$$\sqrt[m]{a^m + x} = a + \frac{x}{ma^{m-1}} + \frac{(1-m)x^2}{2m^2a^{2m-1}} + o(x^2).$$

1380. $\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$ 到含 x^3 的项.

解 设 $f(x) = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$,则

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2-2)(1-2x+x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{1}{3}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}},$$

$$f''(x) = 3x(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{1}{4}(3x^2-2)^2(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$
$$-\frac{2}{3}(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{9}(2x-3)^2(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}},$$

$$f'''(x) = 3(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{3}{2}x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$
$$+\frac{3}{8}(3x^2-2)^3(1-2x+x^3)^{-\frac{5}{2}}$$
$$-3x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$
$$+\frac{4}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}$$
$$+\frac{8}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}$$
$$-\frac{10}{27}(2x-3)^3(1-3x+x^2)^{-\frac{8}{3}},$$

从而

$$f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=\frac{1}{3}, f'''(0)=6,$$

于是,

$$\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$$
$$=\frac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3).$$

1381. e^{2x-x^2} 到含 x^5 的项.

解 $e^{2x-x^2}=1+(2x-x^2)$

$$+\frac{(2x-x^2)^2}{2!}+\frac{(2x-x^2)^3}{3!}+\frac{(2x-x^2)^4}{4!}$$
$$+\frac{(2x-x^2)^5}{5!}+o(x^5)$$
$$=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5).$$

1382. $\frac{x}{e^x-1}$ 到含 x^4 的项.

解 当 x 很小时. 令 $\frac{e^x-1}{x}=1+\Delta$,则有

$$\Delta=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o(x^4),$$

其中 Δ 也很小. 于是,

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=\frac{1}{1+\Delta}$$
$$=1-\Delta+\Delta^2-\Delta^3+\Delta^4+o(x^4).$$

注意到

$$\Delta^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{72} + o(x^4),$$

$$\Delta^3 = \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

$$\Delta^4 = \frac{x^4}{16} + o(x^4),$$

则得

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4).$$

1383. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ 到含 x^{13} 的项.

解 $\sqrt[3]{\sin x^3} = \left(x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} + o(x^{15})\right)^{\frac{1}{3}}$

$$= x\left(1 + \left(\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12})\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= x\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12})\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{9}\left(\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12})\right)^2 + o(x^{12})\right)$$

$$= x - \frac{7}{18}x^7 - \frac{1}{3240}x^{13} + o(x^{13}).$$

1384. $\ln\cos x$ 到含 x^6 的项.

解 $\ln\cos x = \frac{1}{2}\ln(1 - \sin^2 x)$

$$= -\frac{1}{2}\left(\sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} + \frac{\sin^6 x}{3} + o(\sin^6 x)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right)^2\right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right)^4$$

$$+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right)^6+o(x^6)\Big]$$

$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6).$$

其中用到：$\frac{\sin x}{x}\to 1$（当 $x\to 0$），故 $o(\sin^6 x)$ 可换为 $o(x^6)$.

1385. $\sin(\sin x)$ 到含 x^3 的项.

解 $$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3!}+o(x^4)$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)^3+o(x^4)$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

1386. $\mathrm{tg}x$ 到含 x^5 的项.

解 当 x 很小时，有

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)=1-\Delta,$$

其中 $\Delta=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)$ 很小，易见 $\Delta^2=\frac{x^4}{4}+o(x^5)$.

于是，

$$\mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)\frac{1}{1-\Delta}$$

$$=\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)$$

$$\cdot(1+\Delta+\Delta^2+o(x^4))$$

$$=\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)$$

$$\cdot\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)\right)$$

$$=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5).$$

1387. $\ln\frac{\sin x}{x}$ 到含 x^6 的项.

解 $$\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o(x^7)}{x}$$

$$=\ln\left[1+\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o(x^6)\right)\right]$$

$$=\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o(x^6)\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o(x^6)\right)^2$$

$$+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o(x^6)\right)^3+o(x^6)$$

$$=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+o(x^6).$$

1388. 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按照差 $(x-1)$ 的正整数乘幂展开式的前三项.

解 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$.

$$f(1)=1, f'(1)=\frac{1}{2}, f''(1)=-\frac{1}{4}.$$

于是，

$$\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2).$$

1389. 将函数 $f(x)=x^x-1$ 按照 $(x-1)$ 的正整数乘幂展开到含有 $(x-1)^3$ 的项.

解 $f'(x)=x^x(1+\ln x)$，

$$f''(x)=x^x(1+\ln x)^2+x^{x-1},$$

$$f'''(x)=x^x(1+\ln x)^3+2x^{x-1}(1+\ln x)$$
$$+x^{x-1}\left(\frac{x-1}{x}+\ln x\right).$$

$$f(1)=0, f'(1)=1, f''(1)=2, f'''(1)=3.$$

于是，

$$x^x-1=(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3$$
$$+o((x-1)^3).$$

1390. 于点 $x=0$ 的邻域中，用二阶抛物线近似地代替函数

$$y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}\ (a>0).$$

解 $y\Big|_{x=0}=a, y'\Big|_{x=0}=\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_{x=0}=0,$

$$y''\Big|_{x=0}=\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\Big|_{x=0}=\frac{1}{a}.$$

于是，

$$a\operatorname{ch}\frac{x}{a}=a+\frac{x^2}{2a}+o(x^2).$$

1391. 按分式$\frac{1}{x}$的正整数乘幂展开函数$f(x)=\sqrt{1+x^2}-x(x>0)$到含$\frac{1}{x^3}$的项.

解 由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x^4}\right)+o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

于是,

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}-x=x\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}-x$$
$$=\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

1392. 求函数$f(h)=\ln(x+h)(x>0)$按增量h的正整数乘幂展开到含h^n的项(n为自然数).

解 $\ln(x+h)=\ln\left[x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]=\ln x+\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$

$$=\ln x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{h^n}{nx^n}+o(h^n).$$

1393. 设:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots$$
$$+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)(0<\theta<1).$$

且$f^{(n+1)}(x)\neq 0$. 证明:

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

证　按题设，我们有

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),$$

其中 $0<\theta<1$.

又因 $f^{(n+1)}(x)$ 存在，故

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)$$
$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1}).$$

比较上面两式，得

$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)$$
$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1}),$$

从而有

$$\theta\cdot\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}$$
$$=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)+n!\frac{o(h^{n+1})}{h^{n+1}}.$$

由于 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}=f^{(n+1)}(x)\neq 0$,

故由上式知 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$ 存在，并且

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)}{f^{(n+1)}(x)}=\frac{1}{n+1}.$$

1394. 估计下列近似公式的绝对误差：

(a) $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$　当 $0\leqslant x\leqslant 1$;

(б) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ 当 $|x| \leqslant \frac{1}{2}$；

(в) $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$ 当 $|x| \leqslant 0.1$；

(г) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$.

解 用拉格朗日余项公式估计误差：

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}(0 < \theta < 1).$$

(a) 由 $f(x) = e^x$ 及 $0 \leqslant x \leqslant 1$，得

$$f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x} < e.$$

于是，当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，

$$\left|R_{n+1}(x)\right| < \frac{e}{(n+1)!}\left|x\right|^{n+1} \leqslant \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

(б) 由 $f(x) = \sin x$，得

$$\left|f^{(5)}(\theta x)\right| = \left|\sin\left(\theta x + \frac{5}{2}\pi\right)\right| \leqslant 1.$$

于是，当 $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ 时，

$$\left|R_4(x)\right| \leqslant \frac{1}{5!}|x|^5 \leqslant \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{3840}.$$

(в) 由 $f(x) = \operatorname{tg} x$，得

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x},$$

$$f'''(x) = \frac{6}{\cos^4 x} - \frac{4}{\cos^2 x},$$

解　误差 $\Delta \leqslant \frac{|x|^4}{4!}$. 按题设需 $\frac{|x|^4}{4!} < 0.0001$，于是

$$|x| < 0.22134(\text{弧}) = 12°41'.$$

1396. 利用台劳公式近似地计算：

(а) $\sqrt[3]{30}$；(б) $\sqrt[5]{250}$；(в) $\sqrt[12]{4000}$；

(г) $\sqrt{e}$；(д)$\sin 18°$；(е)$\ln 1.2$；

(ж)$\operatorname{arc\,tg} 0.8$；(з)$\arcsin 0.45$；(и)$(1.1)^{1.2}$，并估计误差.

解　(а) $\sqrt[3]{30} = 3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\approx 3\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{9}\right)^2\right]$$

$$\approx 3.1070;$$

$$\Delta < 3\cdot\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}{3!}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3 \approx 2.54\times 10^{-4}.$$

(б) $\sqrt[5]{250} = 3\left(1+\frac{7}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$

$$\approx 3\left[1+\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{243}+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}\left(\frac{7}{243}\right)^2\right]$$

$$\approx 3.0171;$$

$$\Delta < \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot\left(\frac{7}{243}\right)^3 \approx 1.15\times 10^{-6}.$$

(в) $\sqrt[12]{4000} = 2\left(1-\frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{12}}$

$$\approx 2\left(1-\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{128}\right)\approx 1.9960;$$

$$\Delta<\left(\frac{3}{128}\right)^2\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{128}}\approx 5.625\times 10^{-4}.$$

(г) $\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$+\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6\approx 1.64872;$$

$$\Delta=\frac{1}{7!}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\frac{1}{8!}\left(\frac{1}{2}\right)^8+\cdots<\frac{1}{7!}\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}}\approx 1.7\times 10^{-6}.$$

(д) $\sin 18^\circ\approx\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5\approx 0.309017,$

$$\Delta<\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^7\approx 6\times 10^{-8}.$$

(е) $\ln 1.2=\ln(1+0.2)\approx 0.2$

$$-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4$$

$$+\frac{1}{5}(0.2)^5-\frac{1}{6}(0.2)^6+\frac{1}{7}(0.2)^7\approx 0.182322;$$

$$\Delta<\frac{1}{8}(0.2)^8\approx 3.2\times 10^{-7}.$$

(ж) $\operatorname{arc\,tg} 0.8\approx 0.8-\frac{1}{3}(0.8)^3+\frac{1}{5}(0.8)^5$

$$-\frac{1}{7}(0.8)^7+\cdots-\frac{1}{39}(0.8)^{39}$$

≈ 0.67474(弧) $\approx 38^\circ 39' 35''$;

$$\Delta < \frac{1}{41}(0.8)^{41} \approx 2.6 \times 10^{-6}.$$

(д) $\arcsin 0.45 \approx 0.45 + \frac{1}{2.3}(0.45)^3$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}(0.45)^5 + \cdots$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 13}(0.45)^{13}$$

≈ 0.46676 弪 $\approx 26°44'37''$

$$\Delta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15}(0.45)^{15}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdots 15}{2 \cdot 4 \cdots 16 \cdot 17}(0.45)^{17} + \cdots$$

$$< \frac{1}{15}(0.45)^{15}[1 + (0.45)^2$$

$$+ \cdots] < \frac{1}{15}(0.45)^{15} \cdot \frac{1}{1-(0.45)^2} \approx 5.26 \times 10^{-7}.$$

(и) 事实上，只需计算 $\ln 1.1$.

$$\ln 1.1 = \ln(1+0.1) = 0.1 - \frac{(0.1)^2}{2}$$

$$+ \cdots + \frac{(0.1)^5}{5} \approx 0.0953.$$

取五项，所以 $(1.1)^{1.2} = e^{1.2\ln 1.1} \approx e^{1.2\times 0.0953} \approx 1.12117.$

$$\Delta = \frac{1}{4!}e^{1.2\times 0.0953\theta}(0.0953 \times 1.2)^4 < 7.9 \times 10^{-6}.$$

1397. 计算：

(а) e 准确到 10^{-9}；　(б) $\sin 1°$ 准确到 10^{-8}；

(в) $\cos 9°$ 准确到 10^{-5}；　(г) $\sqrt{5}$ 准确到 10^{-4}；

(д)$\log_{10}11$ 准确到 10^{-5}.

解 (a)$\Delta = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}.$$

要 $\Delta < 10^{-9}$,只需 $n!n > 10^9$,即只需 $n \geqslant 11$. 于是,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{11!} \approx 2.718281828.$$

(б)$\Delta < \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^{2n+1}$.

要 $\Delta < 10^{-8}$,只需$\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^{2n+1} < 10^{-8}$,即只需 $n \geqslant 3$. 于是,

$$\sin 1^\circ \approx \frac{\pi}{180} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 \approx 0.01745241.$$

(в)$\Delta < \frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^{2n}$.

要 $\Delta < 10^{-5}$,只需$\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^{2n} < 10^{-5}$,即只需 $n \geqslant 3$.

于是,

$$\cos 9^\circ \approx 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^4 \approx 0.98769.$$

(г) $\sqrt{5} = 2\left(1 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$\Delta < \frac{2 \cdot (2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

要 $\Delta < 10^{-4}$，只需 $\frac{2(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} < 10^{-4}$，即只需 $n \geqslant 4$. 于是，

$$\sqrt{5} \approx 2\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1\cdot 1}{2!\cdot 2^2}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\right]$$

$$\approx 2.2361.$$

(д) $\log_{10}11 = 1 + \log_{10}(1+0.1)$,

$$\Delta < \frac{1}{n+1}(0.1)^{n+1}.$$

要 $\Delta < 10^{-5}$，只需 $\frac{1}{n+1}(0.1)^{n+1} < 10^{-5}$，即只需 $n \geqslant 4$.

于是，

$$\log_{10}11 \approx 1 + \left[0.1 - \frac{1}{2}(0.1)^2 + \frac{1}{3}(0.1)^3\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}(0.1)^4\right]\cdot\frac{1}{\ln 10} \approx 1.04139.$$

利用展开式 1 — V，求下列极限：

1398. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right]}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{4\cdot 2!}\right)x^4+o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

1399. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)\cdot\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\right]-x(1+x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

1400. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left[x^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left\{\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{16x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}-\frac{1}{16x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)-2\right)\right\}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-\frac{1}{4}.$$

1401. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}-\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{6x}-\frac{5}{72x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right.$$

$$-\left(1-\frac{1}{6x}-\frac{5}{72x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\Big]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{3}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{3}.$$

1402. $\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

解 $\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right.$$

$$\left.-x^3\left(1+\frac{1}{2x^6}-\frac{1}{8x^{12}}+o\left(\frac{1}{x^{12}}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{6}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{6}.$$

1403. $\lim_{x\to+0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}(a>0)$.

解 $\lim_{x\to+0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to+0}\frac{e^{x\ln a}+e^{-x\ln a}-2}{x^2}$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}\left[\left(1+x\ln a+\frac{x^2}{2!}\ln^2a+o(x^2)\right)\right.$$

$$\left.+\left(1-x\ln a+\frac{x^2}{2!}\ln^2a+o(x^2)\right)-2\right]$$

$$=\lim_{x\to+0}[\ln^2a+o(1)]=\ln^2a\ (a>0).$$

1404. $\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

解 $\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \frac{1}{2}.$$

1405. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$.

解 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3!}x + o(x)}{1 + o(x^2)}$$

$$= 0.$$

1406. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \text{ctg}x\right)$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \text{ctg}x\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3)\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{3} + o(x^2)\right] = \frac{1}{3}.$$

当 $x\to 0$ 时，求出无穷小量 y 的形如 Cx^n（C 为常数）的主项，假设：

1407. $y = \text{tg}(\sin x) - \sin(\text{tg}x)$.

解 $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\text{tg}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots.$$

从而

$$y = \left(\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{2}{15}\sin^5 x + \frac{1}{35}\sin^7 x + o(\sin^7 x)\right)$$

$$-\left(\operatorname{tg}x-\frac{1}{3!}\operatorname{tg}^3x+\frac{1}{5!}\operatorname{tg}^5x-\frac{1}{7!}\operatorname{tg}^7x+o(\operatorname{tg}^7x)\right)$$

$$=\Big[\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+o(x^7)\right)$$

$$+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+0(x^7)\right)^3$$

$$+\frac{2}{15}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+o(x^7)\right)^5$$

$$+\frac{1}{315}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+o(x^7)\right)^7\Big]$$

$$-\Big[\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{315}+o(x^7)\right)$$

$$-\frac{1}{3!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{315}+o(x^7)\right)^3$$

$$+\frac{1}{5!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{315}+o(x^7)\right)^5$$

$$-\frac{1}{7!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{315}+o(x^7)\right)^7+o(x^7)\Big]$$

$$=\frac{x^7}{30}+o(x^7).$$

故 y 的主项为$\frac{x^7}{30}$.

1408. $y=(1+x)^x-1$.

解 $y=e^{x\ln(1+x)}-1=e^{x\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}-1$

$$=e^{x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}-1$$

$$=1+\left(x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)+o\left(x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)-1$$

$$=x^2+o(x^2).$$

解之，得 $a=\frac{4}{3}, b=-\frac{1}{3}$.

1411. 当 $|x|$ 为小量时，推出下列各式的简单的近似公式：

(а) $\frac{1}{R^2}-\frac{1}{(R+x)^2}(R>0)$；

(б) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$；

(в) $\frac{A}{x}\left[1-\left(1+\frac{x}{100}\right)^{-n}\right]$；

(г) $\frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{x}{100}\right)}$.

解 (а) $\frac{1}{R^2}-\frac{1}{(R+x)^2}=\frac{1}{R^2}\left[1-\left(1+\frac{x}{R}\right)^{-2}\right]$

$$\approx\frac{1}{R^2}\left[1-1+\frac{2x}{R}\right]=\frac{2x}{R^3};$$

(б) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}=\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$-\left(1-\frac{2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\approx\left[1+\frac{2x}{3(1-x)}\right]-\left[1-\frac{2x}{3(1+x)}\right]$$

$$\approx\frac{4x}{3(1-x^2)}\approx\frac{4}{3}x;$$

(в) $\frac{A}{x}\left[1-\left(1+\frac{x}{100}\right)^{-n}\right]\approx\frac{A}{x}\left[1-\left(1-\frac{nx}{100}\right)\right]=\frac{nA}{100}$；

(г) $\frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{x}{100}\right)}=\frac{\ln 2}{\frac{x}{100}-\frac{x^2}{20000}+\cdots}$

$$\approx \frac{\ln 2}{\frac{x}{100}} = \frac{100\ln 2}{x} \approx \frac{70}{x}.$$

1412. 当 x 的绝对值为小量时，推出形如

$$x = \alpha\sin x + \beta\operatorname{tg} x$$

且准确到 x^5 项的近似公式.

把这个公式用于小角度的弧长的近似求法.

解 $$x = \alpha\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right]$$

$$+ \beta\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\right]$$

$$= (\alpha + \beta)x - \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3}\right)x^3$$

$$+ \left(\frac{\alpha}{120} + \frac{2\beta}{15}\right)x^5 + o(x^5)$$

所以 $$(1 - \alpha - \beta)x + \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3}\right)x^3$$

$$- \left(\frac{\alpha}{120} + \frac{2\beta}{15}\right)x^5 + o(x^5) = 0.$$

要此近似公式准确到 x^5 项，当且仅当

$$\begin{cases} 1 - \alpha - \beta = 0, \\ \dfrac{\alpha}{6} - \dfrac{\beta}{3} = 0. \end{cases}$$

解之，得 $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}$.

于是，近似公式为

$$x \approx \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\mathrm{tg}x;$$

弧长 = 中心角 × 半径，设中心角为 x，半径为 R，则弧长 $= Rx \approx \frac{2R}{3}\sin x + \frac{R}{3}\mathrm{tg}x$，此即小角度的弧长的近似公式.

1413. 估计下面的契比协夫法则的相对误差：圆弧近似地等于等腰三角形两腰的和，此等腰三角形是立于弧所对的弦上，并且高为此弓形之矢的$\sqrt{\frac{4}{3}}$.

解 如图 2.51 所示

$$BC = R\sin\alpha, BC^2 = R^2\sin^2\alpha = \frac{R^2}{2}(1 - \cos 2\alpha),$$

$$DC = \sqrt{\frac{4}{3}}EC = \sqrt{\frac{4}{3}}R(1 - \cos\alpha),$$

$$DC^2 = \frac{4}{3}R^2(1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha)$$

$$= R^2\left(2 - \frac{8}{3}\cos\alpha + \frac{2}{3}\cos 2\alpha\right).$$

于是，$BD^2 = BC^2 + DC^2$

$$= R^2\left(\frac{5}{2} - \frac{8}{3}\cos\alpha + \frac{1}{6}\cos 2\alpha\right)$$

$$= R^2\left\{\frac{5}{2} - \frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{24}\alpha^4 - \frac{1}{720}\alpha^6\right) + \frac{1}{6}\left(1 - 2\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha^4 - \frac{4}{45}\alpha^6\right)\right\} + o(\alpha^7)$$

$$= R^2(\alpha^2 - \frac{1}{90}\alpha^6) + o(\alpha^7)$$

$$= R^2\alpha^2\left[1 - \frac{1}{90}\alpha^4 + o(\alpha^5)\right]$$

$$= R^2\alpha^2[1 - \Delta],$$

其中 $\Delta = \frac{1}{90}\alpha^4 + o(\alpha^5)$.

$$BD = R\alpha\sqrt{1-\Delta} =$$

$$R\alpha\left[1 - \frac{1}{2}\Delta + o(\Delta^2)\right] =$$

$$R\alpha\left[1 - \frac{1}{180}\alpha^4 + o(\alpha^5)\right].$$

图 2.31

从而得

$$|\overset{\frown}{BE} - BD| = \left|R\alpha - R\alpha\left[1 - \frac{\alpha^4}{180} + o(\alpha^5)\right]\right|$$

$$= \frac{\alpha^5}{180}R + o(\alpha^5).$$

因此，所求的相对误差为

$$\left|\frac{\overset{\frown}{AB} - (AD + DB)}{\overset{\frown}{AB}}\right| = \left|\frac{2\overset{\frown}{BE} - 2BD}{2\overset{\frown}{BE}}\right|$$

$$= \frac{|\overset{\frown}{BE} - BD|}{|\overset{\frown}{BE}|} = \frac{\frac{\alpha^5}{180}R + o(\alpha^5)}{\alpha R} = \frac{\alpha^4}{180} + o(\alpha^5).$$

可见 α 愈小，相对误差就愈小，就愈精确.

§11. 函数的极值. 函数的最大值和最小值

1° **有极值的必要条件** 若函数于点 x_0 的双侧邻域中有定义，并且

对于某域：$0 < |x - x_0| < \delta$ 内的一切点 x，有下列的不等式成立：

$$f(x) < f(x_0) \text{ 或 } f(x) > f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值（极大值或极小值）.

在有极值的点导函数 $f'(x_0) = 0$（假定它存在）.

2° 有极值的充分条件　第一法则：若(1) 函数 $f(x)$ 于点 x_0 的某邻域 $|x - x_0| < \delta$ 内有定义并且是连续的，且在 x_0 点，$f'(x_0) = 0$ 或不存在（临界点）；(2) $f(x)$ 在范围：$0 < |x - x_0| < \delta$ 内有有限值的导函数 $f'(x)$；(3) 导函数 $f'(x)$ 在 x_0 的左侧与右侧有固定的符号，则函数 $f(x)$ 的性质用下表表示出来：

	导函数的符号		结论
	$x < x_0$	$x > x_0$	
Ⅰ	+	+	无极值
Ⅱ	+	−	极大值
Ⅲ	−	+	极小值
Ⅳ	−	−	无极值

第二法则：若函数 $f(x)$ 有二阶导函数 $f''(x)$，并且在点 x_0 有下列条件成立：

$$f'(x_0) = 0 \text{ 与 } f''(x_0) \neq 0,$$

则函数 $f(x)$ 在此点有极值，就是说：当 $f''(x_0) < 0$ 时，有极大值；当 $f''(x_0) > 0$ 时，有极小值.

第三法则：设函数 $f(x)$ 于某区间 $|x - x_0| < \delta$ 内有导函数 $f'(x)$，$\cdots$，$f^{(n-1)}(x)$，并且在点 x_0 有导函数 $f^{(n)}(x_0)$ 及

$f^{(k)}(x_0) = 0 (k = 1, \cdots, n-1)$，$f^{(n)}(x_0) \neq 0$. 这时：(1) 若 n 为偶数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极值，就是说，当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时，有极大值；当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时有极小值；(2) 若 n 为奇数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 无极值.

3° 绝对极值　在闭区间 $[a, b]$ 内，连续函数 $f(x)$，或于其临界点

(就是导函数 $f'(x)$ 等于零或不存在的点)，或于所给闭区间的端点 a 和 b，达到其最大(最小)值.

研究下列函数的极值:

1414. $y = 2 - x - x^2$.

解 $y' = 1 - 2x$，令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{2}$. 由于 $y'' = -2 < 0$，所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时，函数 y 取极大值

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

1415. $y = (x - 1)^3$.

解 由于 $y' = 3(x - 1)^2 > 0$(除 $x = 1$ 外)，即函数始终上升，故函数 y 无极值.

1416 $y = (x - 1)^4$.

解 $y' = 4(x - 1)^3$，令 $y' = 0$ 得 $x = 1$. 当 $x < 1$ 时 $y' < 0$，当 $x > 1$ 时 $y' > 0$，所以函数 y 当 $x = 1$ 时取极小值

$$y = 0.$$

1417. $y = x^m(1 - x)^n$(m 及 n 为正整数).

解 $y' = x^{m-1}(1 - x)^{n-1}[m - (m + n)x]$，由 $y' = 0$ 得

$$x = 0, x = 1, x = \frac{m}{m + n}.$$

(1) 若 m 为偶数，则

当 $0 < x < \frac{m}{m+n}$ 时，$y' > 0$，

当 $x < 0$ 时，$y' < 0$，

所以在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 0$.

(2) 若 m 为奇数，则 y' 在 $x = 0$ 邻近不变号，故无极值.

(3) 不论 m、n 是奇数还是偶数时，由于

当 $0 < x < \frac{m}{m+n}$ 时，$y' > 0$，

当 $\frac{m}{m+n} < x < 1$ 时，$y' < 0$，

所以，函数 y 在 $x = \frac{m}{m+n}$ 处有极大值

$$y = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

(4) 同理，容易得知：若 n 为偶数时，则当 $x = 1$ 时有极小值

$$y = 0.$$

若 n 为奇数，则当 $x = 1$ 时函数 y 无极值.

1418. $y = \cos x + \mathrm{ch}\, x$.

解 $y' = -\sin x + \mathrm{sh}\, x$，令 $y' = 0$ 得 $x = 0$. 由于

$y'' = -\cos x + \mathrm{ch}\, x$，$y''(0) = 0$，

$y''' = \sin x + \operatorname{sh} x, y'''(0) = 0,$

$y^{(4)} = \cos x + \operatorname{ch} x, y^{(4)}(0) = 2 > 0,$

所以，当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 2$.

1419. $y = (x+1)^{10}e^{-x}$.

解 $y' = e^{-x}(x+1)^9(9-x)$，令 $y' = 0$ 得 $x = -1$ 或 $x = 9$.

由于

$$当\ x < -1\ 时, y' < 0,$$

$$当\ -1 < x < 9\ 时, y' > 0,$$

$$当\ x > 9\ 时, y' < 0,$$

所以，当 $x = -1$ 时有极小值 $y = 0$；当 $x = 9$ 时有极大值

$$y = 10^{10}e^{-9} \approx 1234100.$$

1420. $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ （n 为自然数）.

解 $y' = -\frac{1}{n!}e^{-x}x^n$，令 $y' = 0$ 得 $x = 0$.

(1) 若 n 为偶数，由于 $y' < 0$（除 $x = 0$ 外），故当 $x = 0$ 时函数 y 无极值.

(2) 若 n 为奇数，则

$$当\ x < 0\ 时, y' > 0,$$

当 $x > 0$ 时，$y' < 0$，

所以，当 $x = 0$ 时有极大值 $y = 1$.

1421. $y = |x|$.

解 当 $x = 0$ 时，得 $y = 0$，又在 $x = 0$ 的邻域内对于任意 $x \neq 0$，恒有 $y = |x| > 0$，所以，当 $x = 0$ 时函数有极小值 $y = 0$. 注意，$y'|_{x=0}$ 不存在.

1422. $y = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

解 $y' = \dfrac{1-3x}{3\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$，令 $y' = 0$ 得 $x = \dfrac{1}{3}$. 因为

当 $x < 0$ 时，$y' > 0$，

当 $0 < x < \dfrac{1}{3}$ 时，$y' > 0$，

当 $\dfrac{1}{3} < x < 1$ 时，$y' < 0$，

当 $x > 1$ 时，$y' > 0$，

所以，当 $x = 0$ 时无极值；当 $x = \dfrac{1}{3}$ 时有极大值

$$y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{4} \approx 0.529;$$

当 $x = 1$ 时有极小值 $y = 0$.

1423. 函数

$$f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$$

（n 为自然数），其中函数 $\varphi(x)$ 当 $x = x_0$ 时连续及 $\varphi(x_0)$

$$f''(x)=\frac{P'_1(x)Q^2(x)-2Q(x)Q'(x)P_1(x)}{Q^4(x)},$$

于是

$$f''(x_0)=\frac{P_1'(x_0)}{Q_2(x_0)}.$$

由于 $Q_2(x_0)>0$，所以有

$$\operatorname{sgn}f''(x_0)=\operatorname{sgn}P'(x_0).$$

1425. 可否断定下面的事实：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极大值，则在此点某充分小邻域内，函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧上升，而右侧下降？

解 不能断定. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2(2+\sin\frac{1}{x}), & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\\ 2, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\end{cases}$$

则 $f(x)-f(0)=-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)<0$

$$(x\in(-\delta,\delta),x\neq 0).$$

所以在 $x=0$ 点有极大值 $f(0)=2$.

易知

$$f'(x)=\cos\frac{1}{x}-2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)(x\neq 0).$$

故在 $x=0$ 的任意小邻域内 $f'(x)$ 都时正时负，故在 $x=0$ 的左侧或右侧的任意小邻近 $f(x)$ 都是振荡的（时上升时下降）.

1426. 已给函数

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\text{ 当 }x\neq 0;f(0)=0.$$

证明：虽然

$$f^{(n)}(0)=0(n=1,2\cdots),$$

函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 有极小值.

作出此函数的图形.

证　在 1225 题中已证 $f^{(n)}(0)=0\quad(n=1,2\cdots)$. 由于

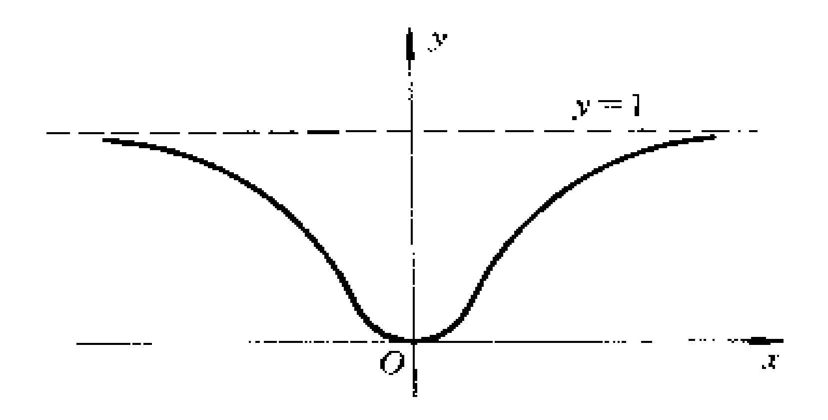


图 2.52

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},f''(x)=\frac{4-6x^2}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

又过 $x=0$ 点 $f'(x)$ 从负变到正，故 $f(0)=0$ 为极小值.

令 $f''(x)=0$ 解得拐点 $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. 又由

$$f(x)=f(-x),\lim_{x\to\infty}f(x)=1$$

知，$f(x)$ 为偶函数，$y=1$ 为渐近线(图 2.52).

1427. 研究下列函数的极值：

(a) 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2}+\sin\frac{1}{x}\right)$ 及

$f(0)=0$;

(б) 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2}+\cos\frac{1}{x}\right)$ 及

$f(0)=0$.

作出这些函数的图形.

解 由于 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|<\sqrt{2}$，$\left|\cos\frac{1}{x}\right|<\sqrt{2}$ 及 $e^{-\frac{1}{|x|}}>0$，所以对于(a)和(б)均有 $f(x)>f(0)(x\neq 0)$，故当 $x=0$ 时均有极小值 $f(0)=0$. 对于 $x\neq 0$，(a)和(б)均存在 $f'(x)$，但易知 $f'(x)=0$ 无解，因而无其它极值.

它们的图形分别如图 2.53 及图 2.54 所示.

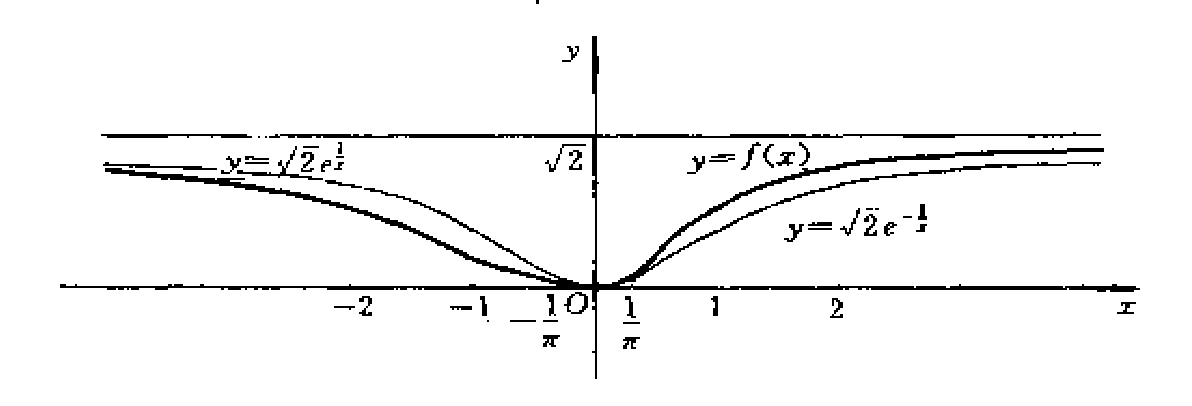


图 2.53

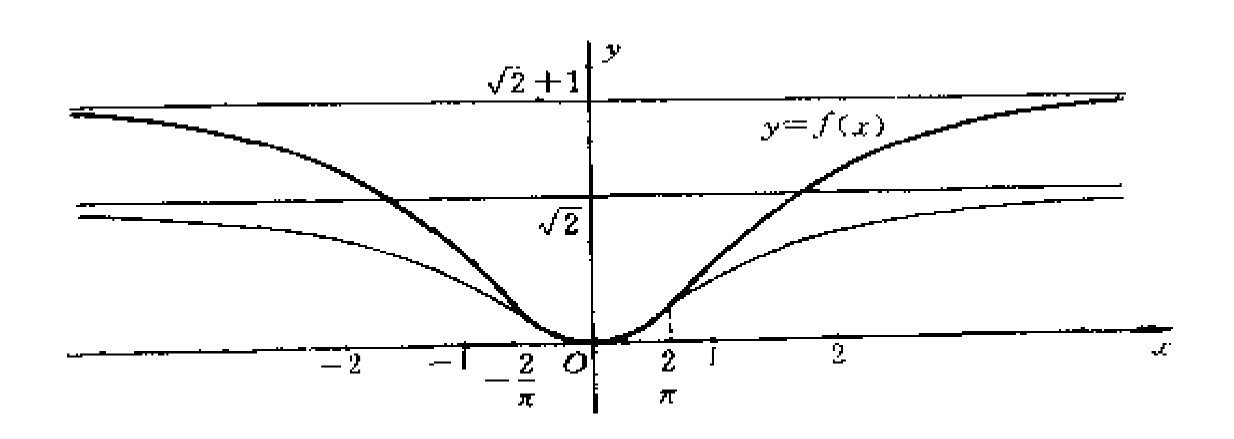


图 2.54

1428. 已给函数

$$f(x) = |x|\left(2 + \cos \frac{1}{x}\right) 当 x \neq 0; f(0) = 0.$$

研究此函数于点 $x = 0$ 处的极值，并作出此函数的图形.

解 由于当 $x \neq 0$ 时，恒有 $f(x) > f(0)$，故当 $x = 0$ 时有极小值 $f(0) = 0$，其图形如图 2.55 所示，它对称于 Oy 轴，又当 $x \to 0$ 时，$f(x) \to 0$.

求下列函数的极值：

1429. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

解 $y' = 3x^2 - 12x + 9$，令 $y' = 0$ 得 $x = 1$ 或 3. 因为

$$y'' = 6x - 12, y''(1) = -6 < 0, y''(3) = 6 > 0,$$

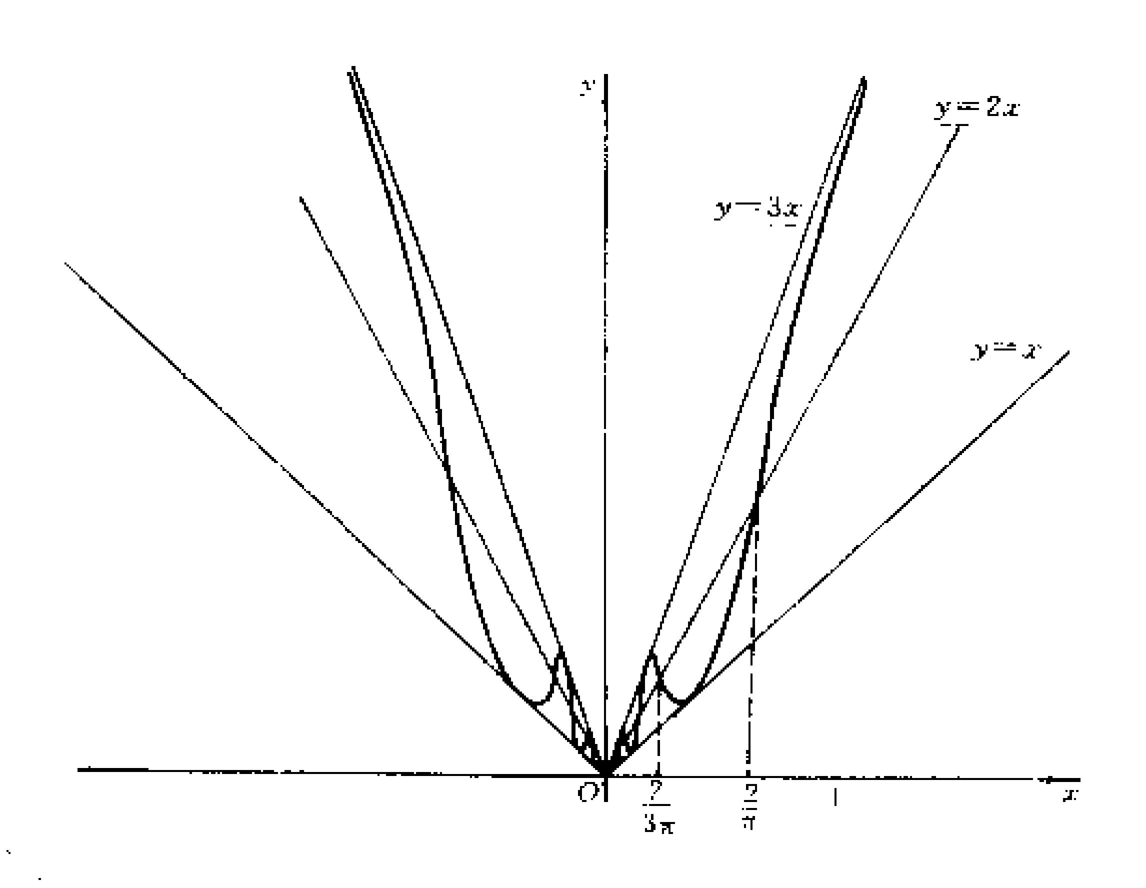


图 2.55

所以，

当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1 - 6 + 9 - 4 = 0$；

当 $x = 3$ 时有极小值 $y = 3^3 - 6 \times 3^2 + 9 \times 3 - 4 = -4$.

1430. $y = 2x^2 - x^4$.

解 $y' = 4x - 4x^3$，令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$ 或 0. 因为

$y'' = 4 - 12x^2$，$y''(-1) = -8 < 0$，

$y''(0) = 4 > 0$，$y''(1) = -8 < 0$，

所以，

当 $x=-1$ 时有极大值 $y=1$；

当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$；

当 $x=1$ 时有极大值 $y=1$.

1431. $y=x(x-1)^2(x-2)^3$.

解 $y'=(x-1)(x-2)^2(6x^2-10x+2)$. 令 $y'=0$ 得 $x=1,2$ 或 $\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}$.

因为

当 $x<\frac{5-\sqrt{13}}{6}$ 时，$y'<0$，

当 $\frac{5-\sqrt{13}}{6}<x<1$ 时，$y'>0$，

当 $1<x<\frac{5+\sqrt{13}}{6}$ 时，$y'<0$，

当 $\frac{5+\sqrt{13}}{6}<x<2$ 时，$y'>0$，

当 $x>2$ 时，$y'>0$，

所以，

当 $x=\frac{5-\sqrt{13}}{6}\approx 0.23$ 时有极小值 $y\approx -0.76$；

当 $x=1$ 时有极大值 $y=0$；

当 $x=\frac{5+\sqrt{13}}{6}\approx 1.43$ 时有极小值 $y\approx -0.05$；

当 $x=2$ 时无极值.

1432. $y = x + \frac{1}{x}$.

解 $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$,令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$.因为

当 $x < -1$ 时,$y' > 0$,

当 $-1 < x < 0$ 时,$y' < 0$,

当 $0 < x < 1$ 时,$y' < 0$,

当 $x > 1$ 时,$y' > 0$,

所以,

当 $x = -1$ 时有极大值 $y = -2$;

当 $x = 1$ 时有极小值 $y = 2$.

1433. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$.

解 $y' = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$,令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$.因为

当 $x < -1$ 时,$y' < 0$,

当 $-1 < x < 1$ 时,$y' > 0$,

当 $x > 1$ 时,$y' < 0$,

所以,

当 $x = -1$ 时有极小值 $y = -1$;

当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.

1434. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.

解 $y' = \frac{5x-7}{(x+1)^3}$，令 $y'=0$ 得 $x=\frac{7}{5}$. 因为

当 $-1<x<\frac{7}{5}$ 时，$y'<0$。

当 $x>\frac{7}{5}$ 时，$y'>0$。

所以，当 $x=\frac{7}{5}$ 时有极小值 $y=-\frac{1}{24}$.

1435. $y=\sqrt{2x-x^2}$.

解 $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$，令 $y'=0$ 得 $x=1$. 因为

当 $0<x<1$ 时，$y'>0$。

当 $1<x<2$ 时，$y'<0$，

所以，当 $x=1$ 时有极大值 $y=1$.

其次，由于函数 y 的值不为负数，故当 $x=0$ 及 $x=2$ 时，有边界的极小值 $y=0$.

1436. $y=x\sqrt[3]{x-1}$.

解 $y' = \frac{4x-3}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}$，令 $y'=0$ 得 $x=\frac{3}{4}$. 因为

当 $x<\frac{3}{4}$ 时，$y'<0$，

当 $x>\frac{3}{4}$ 时，$y'>0$，

所以，当 $x=\frac{3}{4}$ 时有极小值 $y=-\frac{3}{8}\sqrt[3]{2}\approx-0.47$.

此外，对于 $y'\to\infty$ 的点也可能有极值，但在此题

中，当 x 经过 1 时，导数不变号，故当 $x=1$ 时无极值.

1437. $y=xe^{-x}$.

解 $y'=e^{-x}(1-x)$，令 $y'=0$ 得 $x=1$. 因为

当 $x<1$ 时，$y'>0$.

当 $x>1$ 时，$y'<0$，

所以，当 $x=1$ 时有极大值 $y=e^{-1}\approx 0.368$.

1438. $y=\sqrt{x}\ln x$.

解 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x+2)$，令 $y'=0$ 得 $x=e^{-2}$. 因为

当 $0<x<e^{-2}$ 时，$y'<0$，

当 $x>e^{-2}$ 时，$y'>0$，

所以，当 $x=e^{-2}\approx 0.135$ 时有极小值 $y=-\dfrac{2}{e}$

≈ -0.736.

又因当 $0<x<1$ 时，$y<0$，而

$$y=\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\ln x=0,$$

所以，当 $x=+0$ 时有边界的极大值 $y=0$.

1439. $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$.

解 $y'=\dfrac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=1$ 或 e^2. 因为

当 $0<x<1$ 时，$y'<0$，

当 $1<x<e^2$ 时，$y'>0$，

1442. $y=\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

解 $y'=\dfrac{1-x}{1+x^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=1$. 因为

当 $x<1$ 时，$y'>0$，

当 $x>1$ 时，$y'<0$；

所以，当 $x=1$ 时有极大值 $y=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2\approx 0.439$.

1443. $y=e^x\sin x$.

解 $y'=e^x(\sin x+\cos x)$，令 $y'=0$ 得

$$x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\text{ 或 }\frac{3\pi}{4}+2k\pi\ (k=0、\pm 1,\cdots).$$

因为

$$y''=2e^x\cos x,$$

$$y''\Big|_{x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi}>0,$$

$$y''\Big|_{x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi}<0,$$

所以，当 $x=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ 时有极小值 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}$；

当 $x=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$ 时有极大值 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}$.

1444. $y=|x|e^{-|x-1|}$.

解 当 $x<0$ 时，$y=-xe^{x-1}$，$y'=-(x+1)e^{x-1}$.

令 $y'=0$ 得 $x=-1$. 因为

小值，因此也就是最小值，即 $m = 2$.

又由于 $f''(x) > 0$，曲线呈凹状，所以在端点取得最大值，从而，

$$M = \max\{f(-3), f(10)\} = 66.$$

1447. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$，在闭区间$[-10, 10]$上.

解 由于 $f(x) \geqslant 0$，故对于在区间$[-10, 10]$上能使 $f(x) = 0$ 的点取得最小值. 由 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 得 $x = 1, 2$. 即当 $x = 1, 2$ 时，函数取得最小值

$$m = 0.$$

其次，$f'(x) = (2x - 3)\operatorname{sgn}(x^2 - 2x + 3)$，

$$当 1 < x < \frac{3}{2} 时，f'(x) > 0,$$

$$当 \frac{3}{2} < x < 2 时，f'(x) < 0,$$

所以，当 $x = \frac{3}{2}$ 时有极大值 $y = \frac{1}{4}$，于是

$$M = \max\left\{f\left(\frac{3}{2}\right), f(-10), f(10)\right\} = 132.$$

1448. $f(x) = x + \frac{1}{x}$，在闭区间$[0.01, 100]$上.

解 利用 1432 题结果知 $f(x)$ 当 $x = 1$ 时有极小值 $f(1) = 2$.

由于在此闭区间$[0.01, 100]$上 $f(1)$ 为唯一的极小

值，因此也是最小值，即

$$m = 2.$$

其次，最大值

$$M = \max\{f(0.01), f(100)\} = 100.01.$$

1449. $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$，在闭区间$[-1,1]$上.

解 $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{5-4x}} < 0.$

因此函数$f(x)$在$[-1,1]$上单调下降，所以，最小值和最大值分别为

$$m = f(1) = 1, M = f(-1) = 3.$$

求下列函数的下界(inf)与上界(sup)：

1450. $f(x) = xe^{-0.01x}$，在区间$(0, +\infty)$内.

解 当$x \in (0, +\infty)$时，$f(x) > 0$，而$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$，于是，

$$\inf\{f(x)\} = 0.$$

其次，求极值判断得知，当$x = 100$时，函数$f(x)$取极大值，并且是唯一的极值，即为最大值. 于是，

$$\sup\{f(x)\} = f(100) = \frac{100}{e} \approx 36.8.$$

1451. $f(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!})e^{-x}$，在区间$(0, +\infty)$内.

解　由 1420 题知，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在区间$(0,+\infty)$内单调递减，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$f(0)=1$. 于是，

$$\inf\{f(x)\}=0, \sup\{f(x)\}=1.$$

1452. $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$，在区间$(0,+\infty)$内.

解　$f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 于是，

$$\inf\{f(x)\}=0.$$

容易验证，当 $x=\sqrt{\sqrt{2}-1}$ 时函数 $f(x)$ 有极大值，并且只有一个极值，因而就是最大值. 于是，

$$\sup\{f(x)\}=f(\sqrt{\sqrt{2}-1})$$
$$=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\approx 1.2.$$

1453. $f(x)=e^{-x^2}\cos x^2$，在区间$(-\infty,+\infty)$内.

解　可以求得，函数的最小值和最大值分别为

$$m=f\left(\pm\sqrt{\frac{3\pi}{4}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}\approx -0.067,$$
$$M=f(0)=1.$$

于是，

$$\inf\{f(x)\}=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}\approx -0.067,$$
$$\sup\{f(x)\}=1.$$

1454. 求函数 $f(\xi)=\dfrac{1+\xi}{3+\xi^2}$ 在区间 $x<\xi<+\infty$ 内的下界与

上界，作出下列函数的图形：

$$m(x) = \inf_{x \leqslant \xi < +\infty} f(\xi) \text{ 及 } M(x) = \sup_{x \leqslant \xi < +\infty} f(\xi).$$

解　由于 $f(-3)$，$f(1)$ 分别是函数 $f(\xi)$ 的极小值和极大值，又 $\lim\limits_{\xi \to +\infty} f(\xi) = 0$，于是，

当 $-\infty < x \leqslant -3$ 时，$m(x) = f(-3) = \frac{1}{6}$，

当 $-3 < x \leqslant -1$ 时，$m(x) = \frac{1+x}{3+x^2}$，

当 $-1 < x < +\infty$ 时，$m(x) = 0$；

当 $-\infty < x \leqslant 1$ 时，$M(x) = f(1) = \frac{1}{2}$，

当 $1 < x < +\infty$ 时，$M(x) = \frac{1+x}{3+x^2}$.

$m(x)$ 及 $M(x)$ 的图形分别如图 2.56 及图 2.57 所示.

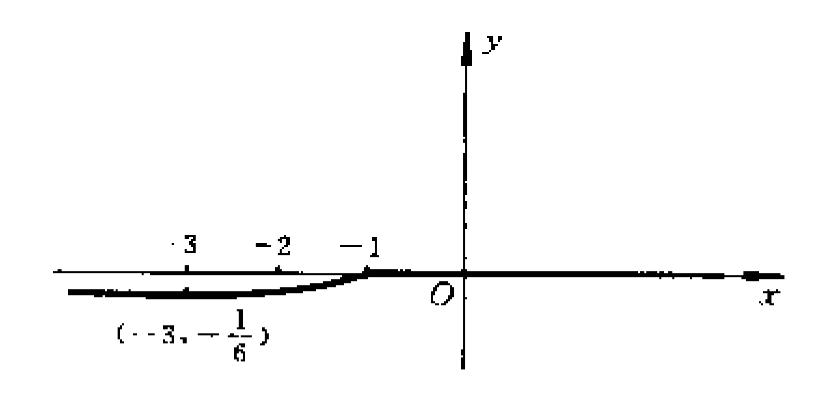


图 2.56

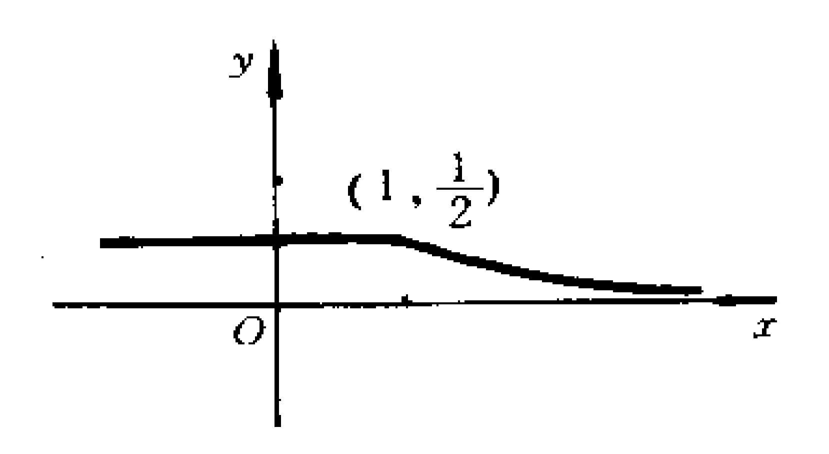


图 2.57

1455. 求以下各叙列的最大项：

(a) $\frac{n^{10}}{2^n}(n=1,2,\cdots)$;

(б) $\frac{\sqrt{n}}{n+10000}(n=1,2,\cdots)$;

(в) $\sqrt[n]{n}\ (n=1,2,\cdots)$.

解 (a) 经判断知当 $x=\frac{10}{\ln 2}$ 时，$f(x)=\frac{x^{10}}{2^x}$ 有极大值，并且是唯一的极值. 从而，最大项

$$\max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right)=\max\left(\frac{(N-1)^{10}}{2^{N-1}},\frac{N^{10}}{2^N},\frac{(N+1)^{10}}{2^{N+1}}\right),$$

其中 $N=\left[\frac{10}{\ln 2}\right]=14$. 于是

$$\max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right)=\max\left(\frac{13^{10}}{2^{13}},\frac{14^{10}}{2^{14}},\frac{15^{10}}{2^{15}}\right)=\frac{14^{10}}{2^{14}}$$

$$\approx 1.77\times 10^7.$$

(б) 经判断知当 $x=10000$ 时 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+10000}$ 有

极大值，并且是唯一的极值. 于是，最大项

$$\max\left(\frac{\sqrt{n}}{n+10000}\right)=f(10000)=\frac{1}{200}.$$

(в) 经判断知当 $x=e$ 时，$f(x)=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$ 有极大值，并且是唯一的极值. 于是，最大项

$$\max(\sqrt[n]{n})=\max(\sqrt[3]{3},\sqrt{2})=\sqrt[3]{3}\approx 1.44.$$

1456. 证明下列不等式：

(a) 当 $|x|\leqslant 2$ 时，$|3x-x^3|\leqslant 2$；

(б) 若 $0\leqslant x\leqslant 1$ 及 $p>1$，则 $\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$；

(в) 当 $m>0$，$n>0$ 及 $0\leqslant x\leqslant a$ 时，

$$x^m(a-x)^n\leqslant\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n};$$

(г) $\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}}\leqslant\sqrt[n]{x^n+a^n}\leqslant x+a\ (x>0,a>0,n>1)$；

(д) $|a\sin x+b\cos x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

证 (a) 设 $f(x)=3x-x^3$，经判断知，在 $|x|\leqslant 2$ 上，其最小值和最大值分别为

$$m=f(-1)=-2,M=f(1)=2,$$

而边界函数值为 $f(-2)=2$，$f(2)=-2$. 于是，

$$|3x-x^3|\leqslant 2.$$

(б) 设 $f(x) = x^p + (1-x)^p$，经判断知 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}}$ 为 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的唯一的极小值，而边界值 $f(0) = f(1) = 1$，所以

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant x + (1-x) = 1.$$

(в) 设 $f(x) = x^m(a-x)^n$，经判断知 $f\left(\frac{ma}{m+n}\right)$ 为 $0 \leqslant x \leqslant a$ 上的唯一的极大值，所以 $x^m(a-x)^n \leqslant$

$$\left(\frac{ma}{m+n}\right)^m \cdot \left(a - \frac{ma}{m+n}\right)^n = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}.$$

(г) 设 $f(x) = \frac{(x^n + a^n)^{\frac{1}{n}}}{x+a}$，经判断知 $f(a) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}}$ 为满足 $x > 0$ 的唯一的极小值，而边界值 $f(+0) = f(+\infty) = 1$，所以

$$\frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leqslant \frac{(x^n + a^n)}{x+a} \leqslant 1.$$

由于 $x + a > 0$，于是

$$\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leqslant \sqrt[n]{x^n + a^n} \leqslant x + a.$$

(д) $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi)$，

其中 $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，所以恒有

$$|a\sin x + b\cos x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}.$$

1457. 求多项式

$$P(x)=x(x-1)^2(x+2)$$

在闭区间$[-2,1]$上"与零的差"，就是求

$$E_p=\sup_{-2\leq x\leq 1}|P(x)|.$$

解 $P'(x)=2(x-1)(2x^2+2x-1)$.

令$P'(x)=0$得$x=1$或$\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，所以

$$E_p=\max\left\{|P(-2)|,|P(1)|,\left|P\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right|,\left|P\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right|\right\}$$

$$=\left|P\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\frac{9+6\sqrt{3}}{4}\approx 4.85.$$

1458. 应当选择怎样的系数q，使多项式

$$P(x)=x^2+q$$

在闭区间$[-1,1]$上与零的差最小，即

$$E_p=\sup_{-1\leq x\leq 1}|P(x)|=\min.$$

解 $P'(x)=2x$，令$P'(x)=0$得$x=0$，所以

$$E_p=\max\{|P(0)|,|P(1)|,|P(-1)|\}$$

$$=\max\{|q|,|1+q|\}.$$

当$|q|=|1+q|$时，E_p最小. 解之，得

$$q=-\frac{1}{2}.$$

此最小的绝对差.

解 由于

$$f(x)-g(x)=x^2-[(x_1+x_2)x+b],$$

$$f'(x)-g'(x)=2x-(x_1+x_2),$$

从而令 $f'(x)-g'(x)=0$,得 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$. 又因

$$f''(x)-g''(x)=2>0,$$

故当 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 时,$f(x)-g(x)$ 取极小值. 于是,

$$\Delta=\max\left\{\left|f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right|,\right.$$

$$\left.\left|f(x_1)-g(x_1)\right|,\left|f(x_2)-g(x_2)\right|\right\}$$

$$=\max\left\{\left|b+\frac{(x_1+x_2)^2}{4}\right|,\left|b+x_1x_2\right|\right\}.$$

要 Δ 为最小,需

$$\left|b+\frac{(x_1+x_2)^2}{4}\right|=\left|b+x_1x_2\right|.$$

解之得

$$b=-\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+6x_1x_2).$$

此时

$$g(x)=(x_1+x_2)x-\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+6x_1x_2),$$

而最小的绝对差

$$\Delta = \frac{1}{8}(x_1 - x_2)^2.$$

1461. 求函数

$$f(x) = \max\{2|x|, |1+x|\}$$

的极小值.

解 $y = 2|x|$ 及 $y = |1+x|$ 的图形如图 2.58 所示，它们的交点是 $A\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 及 $B(1,2)$. 从而

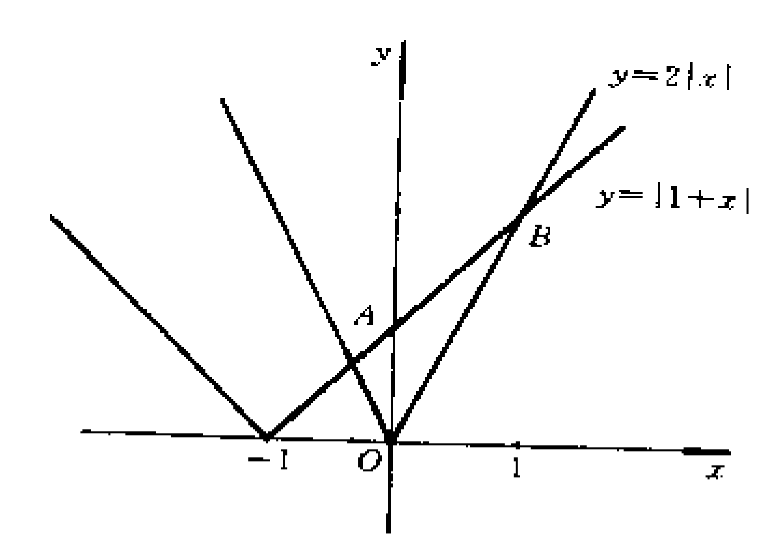


图 2.58

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 1 \leqslant x < +\infty, \\ 1+x, & -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1, \\ -2x, & -\infty < x \leqslant -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

于是，函数 $f(x)$ 的极小值为 $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

确定下列各方程实根的数目，并定这些根所在的范围：

1462. $x^3-6x^2+9x-10=0$.

解 设 $f(x)=x^3-6x^2+9x-10$,则 $f(x)$ 为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数,且有

$$f'(x)=3x^2-12x+9.$$

令 $f'(x)=0$,得驻点 $x=1$ 或 3.

当 $x\in(-\infty,1)$ 时,由于

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty, f'(x)>0, f(1)=-6<0,$$

故在区间 $(-\infty,1)$ 内方程无实根.

当 $x\in(1,3)$ 时,由于

$$f'(x)<0, f(3)=-10<0,$$

故在 $(1,3)$ 内也无实根.

当 $x\in(3,+\infty)$,由于

$$f'(x)>0, f(3)=-10<0, \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

故在 $(3,+\infty)$ 内方程有且仅有一实根.

1463. $x^3-3x^2-9x+h=0$.

解 设 $f(x)=x^3-3x^2-9x+h$,则

$$f'(x)=3x^2-6x-9.$$

令 $f'(x)=0$,得驻点 $x=-1$ 或 3. 由于

$$f(-1)=5+h, f(3)=-27+h,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

故当 $h < -5$ 时，$f(-1) < 0, f(3) < 0$，且

$$f'(x) > 0, x \in (-\infty, -1),$$

$$f'(x) < 0, x \in (-1, 3),$$

$$f'(x) > 0, x \in (3, +\infty),$$

因此，有且仅有一实根位于 $(3, +\infty)$ 内.

当 $-5 < h < 27$ 时，$f(-1) > 0, f(3) < 0$，导数 $f'(x)$ 的符号变化同上，于是，有三个实根，分别位于 $(-\infty, -1)$，$(-1, 3)$ 及 $(3, +\infty)$ 内.

当 $h > 27$ 时，$f(3) > 0, f(-1) > 0$，因此，有且仅有一实根位于 $(-\infty, -1)$ 内.

1464. $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$.

解 设 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20$，则

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12.$$

令 $f'(x) = 0$，得驻点 $x = \pm 1$. 由于

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

$$f(-1) = -31 < 0, f(1) = -15 < 0,$$

并且

$$f'(x) < 0, x \in (-\infty, -1),$$

$$f'(x) > 0, x \in (-1, +\infty),$$

故有两实根，分别位于$(-\infty, -1)$和$(1, +\infty)$内.

1465. $x^5 - 5x = a$.

解 设$f(x) = x^5 - 5x - a$，则

$$f'(x) = 5x^4 - 5.$$

令$f'(x) = 0$，得驻点$x = \pm 1$. 由于

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$f'(x) > 0, x \in (-\infty, -1), x \in (1, +\infty),$$

$$f'(x) < 0, x \in (-1, 1),$$

$$f(-1) = 4 - a, f(1) = -4 - a,$$

故当$a < -4$时，$f(-1) > 0$，$f(1) > 0$. 因此，有且仅有一实根，位于$(-\infty, -1)$内；当$-4 < a < 4$时，$f(-1) > 0$，$f(1) < 0$，此时有三个实根，分别位于$(-\infty, -1)$，$(-1, 1)$和$(1, +\infty)$内；当$a > 4$时，$f(-1) < 0$，$f(1) < 0$. 因此，有且仅有一实根位于$(1, +\infty)$内.

1466. $\ln x = kx$.

解 当$k = 0$时，方程显然仅有一个根$x = 1$. 因此，不妨设$k \neq 0$. 令$f(x) = \ln x - kx \ (x > 0)$，则

$$f'(x) = \frac{1}{x} - k.$$

令　$f'(x)=0$，得驻点 $x=\frac{1}{k}$. 由于

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0,$$

故曲线的图形始终呈凸状.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{k}\right)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$.

又因

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=\ln\frac{1}{k}-1,$$

故当 $k>\frac{1}{e}$ 时，$f\left(\frac{1}{k}\right)<0$，此时方程无根.

当 $0<k<\frac{1}{e}$ 时，$f\left(\frac{1}{k}\right)>0$，

因此，方程有两个实根，分别位于 $\left(0,\frac{1}{k}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$ 内.

当 $-\infty<k<0$ 时，由于

$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=-\infty$，$f(1)=-k>0$，$f'(x)=\frac{1}{x}-k>0$，故此时方程有且仅有一实根位于(0,1)内.

1467⁺. $e^x=ax^2(a>0)$.

解　对于函数 $f(x)=e^x-ax^2$，有 $f(0)=1>0$；又因 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，故总存在充分大的正数 x_0，使 $f(-x_0)<0$. 由函数 $f(x)$ 的连续性得知在 $(-x_0,0)$ 中，从而在 $(-\infty,0)$ 中至少有 $f(x)=0$ 的一个实根. 而当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)=e^x-2ax>0$，即函数

严格单调上升．因此，$f(x)=0$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时只有唯一的根．

对于 $x>0$ 的情况，为求方程 $e^x=ax^2$ 的根，只需求方程 $x=\ln a+2\ln x(a>0,x>0)$ 的根．设

$$g(x)=x-\ln a-2\ln x,$$

则有

$$g'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}.$$

令 $g'(x)=0$ 得 $x=2$.

当 $0<x<2$ 时，$g'(x)<0$；

当 $x>2$ 时，$g'(x)>0$，

所以，$g(2)=\ln\frac{e^2}{4a}$ 为极小值．又因 $\lim\limits_{x\to+0}g(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$．因此，

当 $g(2)>0$，即 $0<a<\frac{e^2}{4}$ 时，$g(x)=0$ 无根．

当 $g(2)=0$，即 $a=\frac{e^2}{4}$ 时，$g(x)=0$ 有唯一的根．

当 $g(2)<0$，即 $a>\frac{e^2}{4}$ 时，$g(x)=0$ 有二个根，它们分别位于 $(0,2)$ 和 $(2,+\infty)$ 内．

综上所述，方程 $e^x=ax^2$ 根的情况如下：

当 $0<a<\frac{e^2}{4}$ 时有唯一的根，位于 $(-\infty,0)$ 内；当 $a=\frac{e^2}{4}$ 时，有两个根，一根为 2，一根位于 $(-\infty,0)$ 内；当 $\frac{e^2}{4}<a<+\infty$ 时有三个根，分别位于 $(-\infty,0)$，$(0,2)$ 和 $(2,+\infty)$ 内．

1468. 当 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 时，$\sin^3 x \cdot \cos x = a$.

解 当 $a=0$ 时，方程显然有实根 $x=0, \frac{\pi}{2}$ 或 π. 因此，不妨设 $a \neq 0$. 令 $f(x)=\sin^3 x\cos x - a$，则

$$f'(x) = 3\sin^2 x\cos^2 x - \sin^4 x.$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$. 由于

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16} - a, f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{16} - a,$$

$$f(0) = f(\pi) = -a,$$

并且

$$\text{当 } x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \text{ 时}, f'(x) > 0,$$

$$\text{当 } x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \text{ 时}, f'(x) < 0.$$

于是，当 $|a| < \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时，方程有两个实根位于 $(0,\pi)$ 内；当 $|a| > \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时，方程无实根．

1469. $\mathrm{ch}x = kx$.

解 设 $f(x) = \mathrm{ch}x - kx$，则

$$f'(x) = \mathrm{sh}x - k.$$

令 $f'(x)=0$，得唯一驻点 x_0，它适合 $k = \mathrm{sh}x_0$.

由于 $f''(x) = \mathrm{ch}x > 0$，故曲线图形呈凹状，且在 $x = x_0$ 达最小值．显然 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$，因此，我们只需考虑 $f(x_0)$ 的符号．而

$$f(x_0) = \mathrm{ch}x_0 - kx_0 = \mathrm{ch}x_0 - x_0\mathrm{sh}x_0.$$

先设 $k>0$，于是 $x_0>0$. 引进辅助函数

$$g(x) = \text{ch}x - x\text{sh}x,$$

方程 $g(x) = 0$,即 $\text{cth}x = x$ 的(唯一)正根 $\xi \approx 1.2$*).由于

$$g'(x) = \text{sh}x - \text{sh}x - x\text{ch}x = - x\text{ch}x,$$

因此假如 $x > 0$,则 $g'(x) < 0$,故 $g(x)$ 在$[0, +\infty)$上严格单调下降.

若 $k > \text{sh}\xi$,即 $\text{sh}x_0 > \text{sh}\xi$,由于 $\text{sh}x$ 是严格增大的,故必 $x_0 > \xi$. 从而有

$$f(x_0) = \text{ch}x_0 - x_0\text{sh}x_0 < \text{ch}\xi - \xi\text{sh}\xi = 0.$$

因此,方程 $f(x) = 0$ 恰有两个实根. 由于

$$f(\xi) = \text{ch}\xi - k\xi < \text{ch}\xi - \xi\text{sh}\xi = 0,$$

$$f(0) = 1,$$

故两根分别位于$(0,\xi)$及$(\xi, +\infty)$内.

若 $k = \text{sh}\xi$, 则 $\text{sh}x_0 = \text{sh}\xi$, 从而 $x_0 = \xi$. 因此, $f(x_0) = 0$,此时方程 $f(x) = 0$ 恰有一实根 x_0.

若 $0 < k < \text{sh}\xi$,则 $\text{sh}x_0 < \text{sh}\xi$,从而 $x_0 < \xi$. 因此

$$f(x_0) = \text{ch}x_0 - x_0\text{sh}x_0 > \text{ch}\xi - \xi\text{sh}\xi = 0,$$

故方程 $f(x) = 0$ 无实根.

若 $k = 0$,显然方程 $f(x) = 0$ 无根.

若 $k < 0$,则可令 $x = - t$,于是得

$$\text{ch}t = - kt \quad (- k > 0).$$

通过按上述的方法讨论该方程的根,易知当 $\text{sh}\xi < - k$ 时,原方程有两实根,分别位于$(-\xi,0)$及$(-\infty, -\xi)$内,其中 ξ 满足 $\text{cth}\xi = \xi(\approx 1.2)$. 而当 $- \text{sh}\xi < k < 0$ 时,方程无实根.

综上所述,若 $|k| > \text{sh}\xi \approx 1.50$,方程有两实根 x_1

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0,$$

此即方程仅有一实根的条件(前面 $p\geqslant 0$ 的情形可合并到此条件中去).

而 $f(x_1)<0$ 及 $f(x_2)>0$ 相当于

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0,$$

此即方程有三实根的条件.

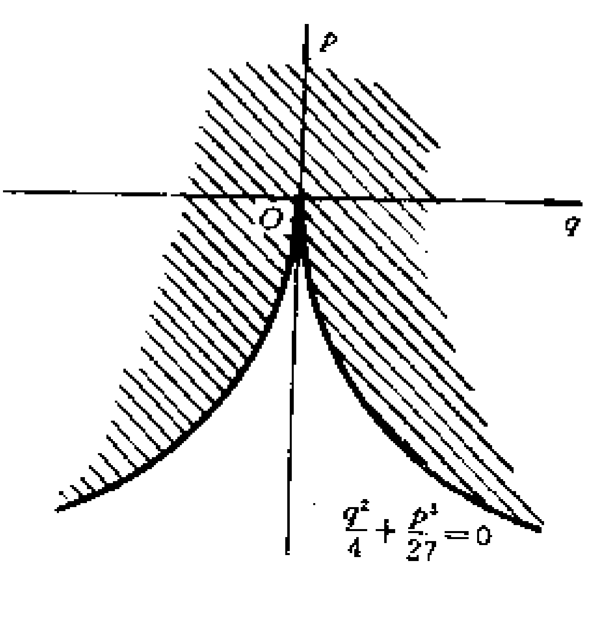


图 2.59

如图 2.59 所示,曲线

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$$

的左右上方是方程仅有一实根的 (p,q) 域,以阴影表之;而曲线的下方则是方程有三实根的 (p,q) 域,以不具阴影表之.

§12. 依据函数的特征点作函数图形

为了作出函数 $y=f(x)$ 的图形,必须:(1) 确定此函数的存在域;并研究函数在其存在域之边界上各点之性质;(2) 查明图形的对称性和周期性;(3) 求出函数的不连续点及连续的区间;(4) 确定函数的零值点及同号区间;(5) 求出极值点及查明函数上升和下降的区间;(6) 确定拐点及函数图形凸凹的区间;(7) 若有渐近线存在则求出渐近线;(8)

指出函数图形的各种特性。

作出下列函数的图形：

1471. $y = 3x - x^3$

解 $y' = 3 - 3x^2$，令 $y' = 0$ 得 $x = -1$ 或 1.

$y'' = -6x$　令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$.

列表

x		-1		0		1	
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	↘	极小点	↗	拐点	↗	极大点	↘

当 $x = -1$ 时，

$y = -2$；

$x = 0, \pm\sqrt{3}$

时，$y = 0$；

$x = 1$ 时，$y = 2$.

图形对称于原点

如图 2.60 所示.

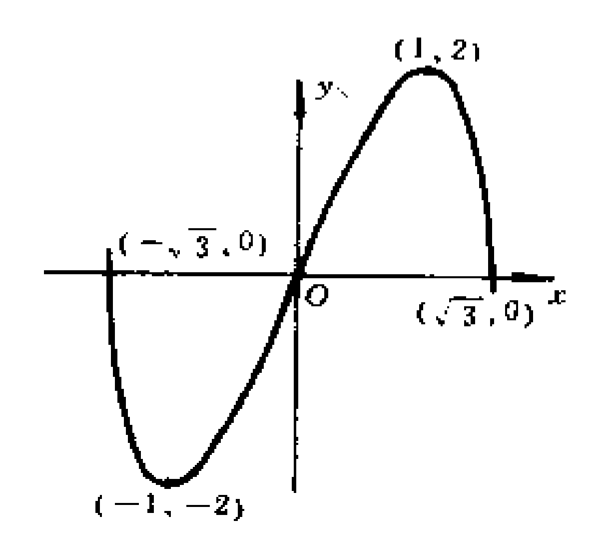
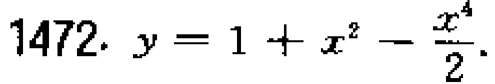


图 2.60



1472. $y = 1 + x^2 - \dfrac{x^4}{2}$.

解 以 $-x$ 替代 x，y

值不变，故图形对称于 Oy 轴.

零点处：$x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{3}} \approx \pm 1.65$.

$y' = 2x - 2x^3$，令 $y' = 0$ 得 $x = 0$，或 ± 1.

$$y'' = 2 - 6x^2，令\ y'' = 0\ 得\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

列表

x		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	↘	极小点	↗	拐点	↗	极大点	↘

当 $x = 0$ 时，$y = 1$；$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，$y = \frac{23}{18}$；$x = 1$ 时，$y = \frac{3}{2}$（图 2.61）

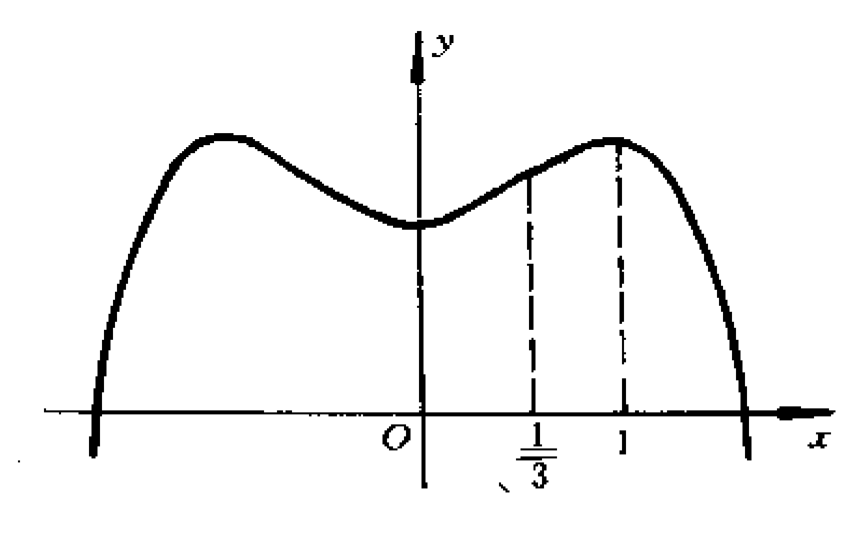


图 2.61

1473. $y = (x + 1)(x - 2)^2$

解 $y' = 3x(x - 2)$，令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 或 2；

$y'' = 6x - 6$，令 $y'' = 0$ 得 $x = 1$.

列表

x		0		1		2	
y'	+	0	−	−		0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	↗	极大点	↘	拐点	↘	极小点	↗

当 $x = 0$ 时，$y = 4$；

$x = 1$ 时，$y = 2$；

$x = 2, -1$ 时，$y = 0$

(图 2.62)

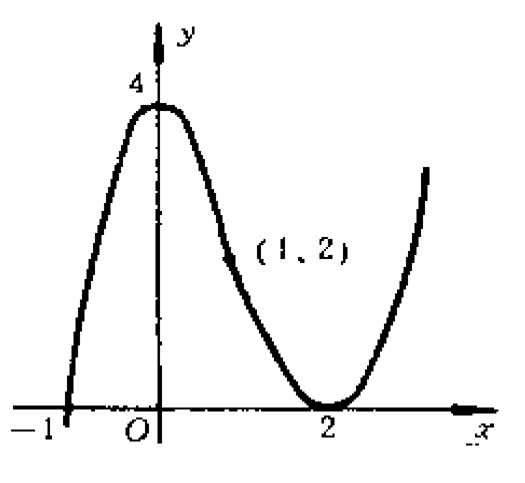


图 2.62

1474. $y = \dfrac{2 - x^2}{1 + x^4}$.

解 显见图形对称于 Oy 轴.

零点处：$x = \pm\sqrt{2}$.

$$y' = \frac{2x(x^4 - 4x^2 - 1)}{(1 + x^4)^2},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 或 $\pm\sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx \pm 2.06$.

$$y'' = -\frac{2(3x^8 - 20x^6 - 12x^4 + 12x^2 + 1)}{(1 + x^4)^3},$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm 2.67$ 或 ± 0.77. 经判别知它们为拐点，又因

$y''|_{x=0} = -2 < 0$，故有极大值 $y = 2$；

$y''|_{x=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}} > 0$，故有极小值 $y = 1 - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ≈ -0.12.

渐近线为 $y = 0$. 事实上，它的斜率和截距分别为 k

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-x^2}{x(1+x^4)} = 0$,它在 y 轴上的截距为 $b = \lim\limits_{x\to\infty}[y-kx] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2-x^2}{1+x^4} = 0$. 如图 2.63 所示.

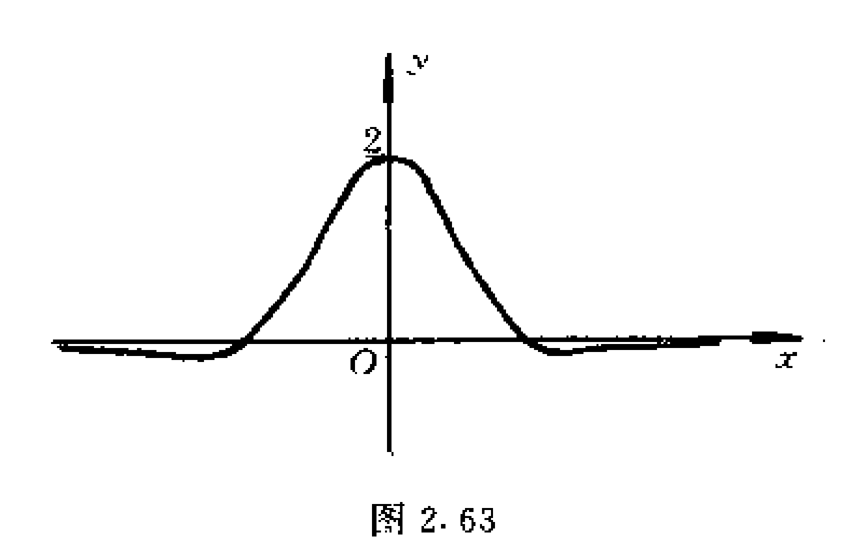


图 2.63

1475. $y = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$.

解 零点处:$x=-1$ 及 $x=1$.

渐近线:$x=2$,$x=3$ 和 $y=1$.

$y' = \frac{-5x^2+14x-5}{(x^2-5x+6)^2}$,

$y'' = \frac{2(5x^3-21x^2+15x+17)}{(x^2-5x+6)^3}$.

令 $y'=0$ 得 $x\approx 0.42$,$x\approx 2.38$. 令 $y''=0$ 得 $x\approx -0.586$. 经判别知:$y|_{x\approx 0.42} \approx -0.20$ 为极小值,$y|_{x\approx 2.38} \approx -19.80$ 为极大值;$x\approx -0.586$,$y\approx -0.07$ 为拐点. 由于

$y = 1 - \frac{3}{x-2} + \frac{8}{x-3}$,

故可用图形相加法作出函数的图形(图 2.64).

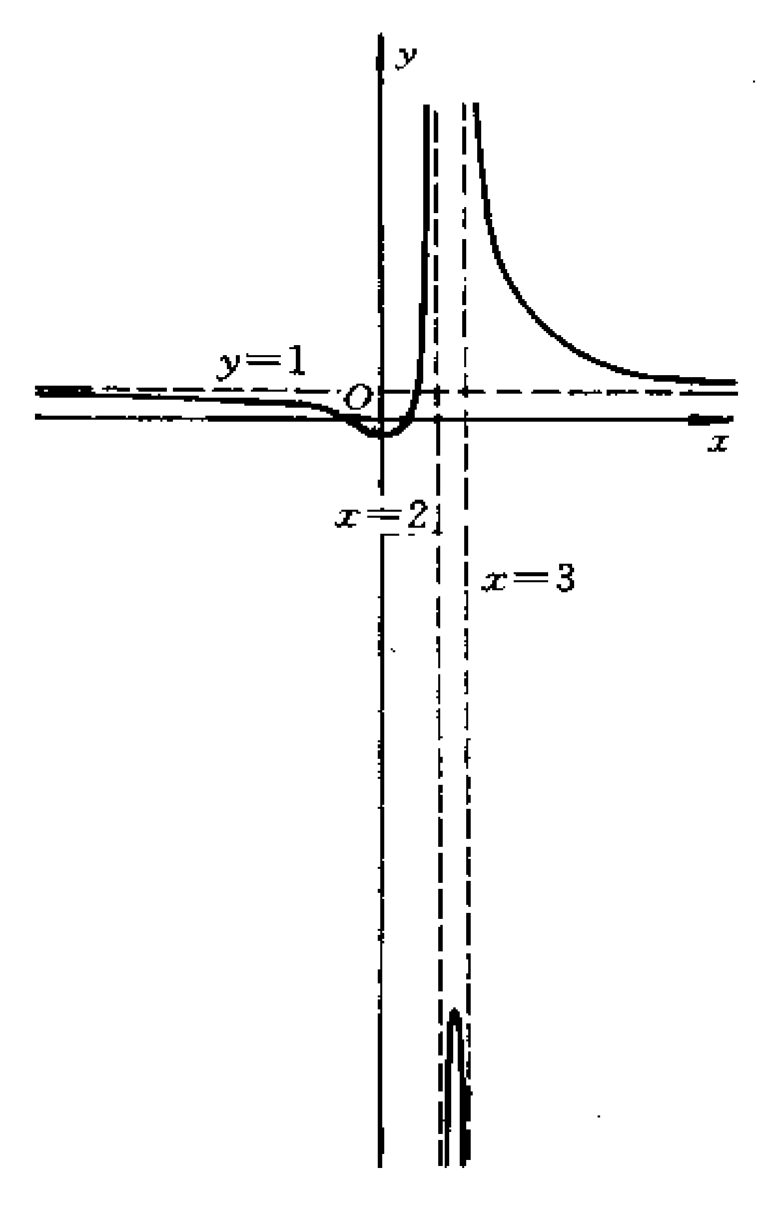


图 2.64

1476. $y=\frac{x}{(1+x)(1-x)^2}$.

解　零点处：$x=0$. 不连续点：$x=-1$ 及 $x=1$. 渐近线：$y=0$. $x=-1$ 和 $x=1$.

$$y'=\frac{2x^2+x+1}{(1+x)^2(1-x)^3},$$

$$y'' = \frac{2(3x^3 + 3x^2 + 5x + 1)}{(1 + x)^3(1 - x)^4},$$

$y' = 0$ 无实根，无极值点．令 $y'' = 0$ 得 $x \approx -0.22$，经判别知它为拐点，此时 $y = -0.20$.

当 $x < -1$ 时，$y' > 0$，曲线上升；

当 $-1 < x < 1$ 时，$y' > 0$，曲线上升；

当 $x > 1$ 时，$y' < 0$，曲线下降(图 2.65)

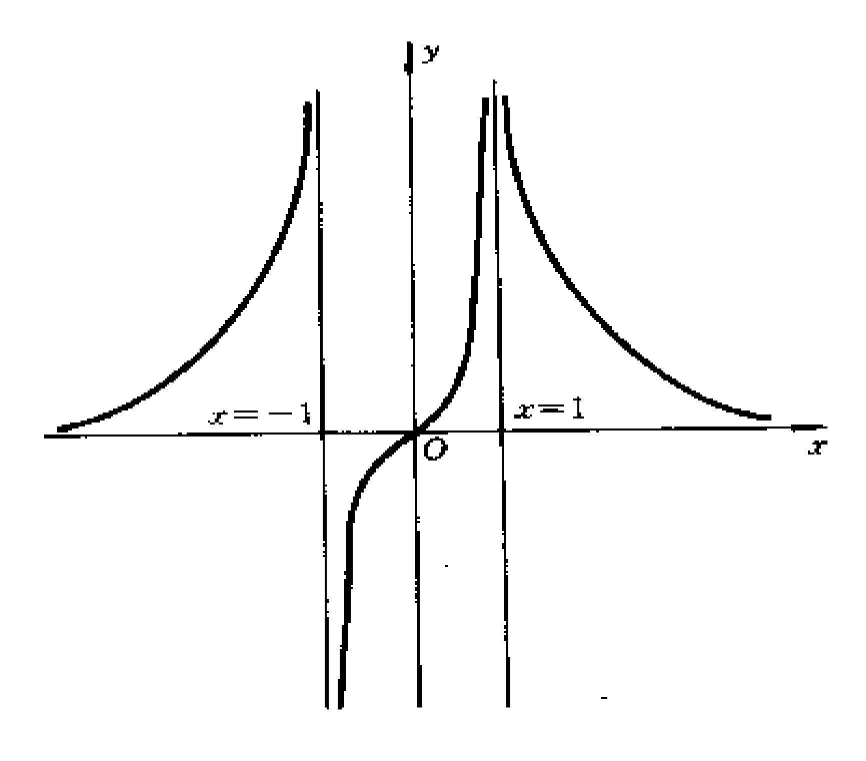


图 2.65

1477. $y = \frac{x^4}{(1 + x)^3}$.

解　零点处：$x = 0$. 不连续点：$x = -1$.

斜渐近线：$y = x - 3$，事实上，

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \to \infty}(y - kx) = -3.$$

垂直渐近线：$x = -1$.

$$y' = \frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}.$$

令 $y' = 0$，得 $x = 0$，或 $x = -4$.

$$y'' = \frac{12x^2}{(1+x)^5}.$$

当 $x < -1$ 时，$y'' < 0$，图形呈凸状；

当 $x > -1$ 时，$y'' > 0$，图形呈凹状；

又 $y''|_{x=-4} < 0$，

故当 $x = -4$ 时有极大值

$$y = -9\frac{13}{27};$$

由于 y' 经过 $x = 0$ 从负变到正，故当 $x = 0$ 时取得极小值 $y = 0$（图 2.66）

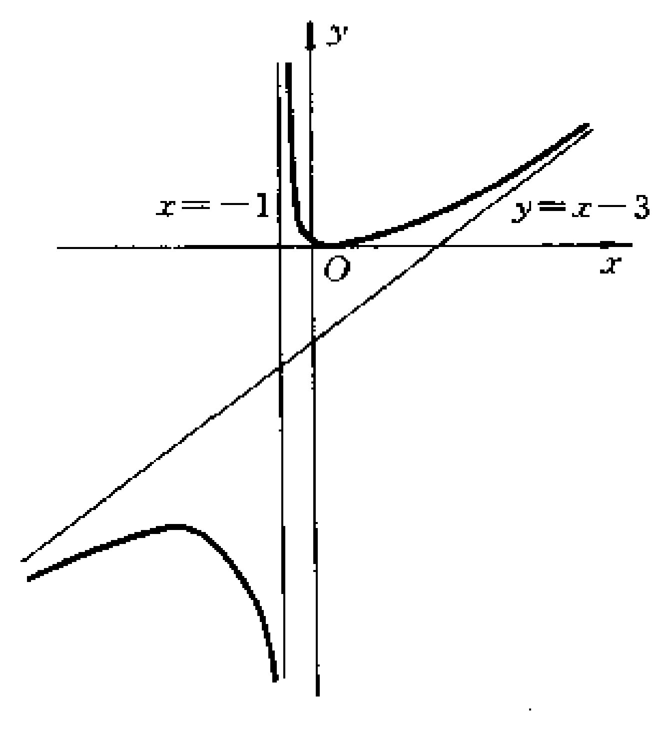


图 2.66

1478. $y=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

解 零点处：$x=-1$.

垂直渐近线：$x=1$；又

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=0, b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=1.$$

故还有水平渐近线为 $y=1$.

$y'=\frac{8(1+x)^3}{(1-x)^5}$，令 $y'=0$ 得 $x=-1$；

$y''=\frac{16(x+1)^2(x+4)}{(1-x)^6}$，令 $y''=0$ 得 $x=-1$ 或 -4.

列表

x		-4		-1		1	
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	∞	$-$
y''	$-$	0	$+$	0	$+$	∞	$+$
y	↘	拐点	↘	极小点	↗	不连续点	↘

当 $x=-4$ 时，$y=\frac{81}{625}$；$x=-1$ 时，$y=0$；$x=0$ 时，$y=1$(图 2.67).

1479. $y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.

解 零点处：$x=0$ 及 $x=1$.

垂直渐近线：$x=-1$；

斜渐近线：$y=x-3$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1, b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=-3.$$

当 $x=0$ 时，有极大值 $y=0$；

当 $x=\frac{\sqrt{17}-3}{2}\approx 0.56$ 时，有极小值

$$y=\frac{34\sqrt{17}-142}{32}\approx -0.06;$$

当 $x=\frac{1}{5}$ 时，$y=-\frac{1}{45}$（图 2.68）.

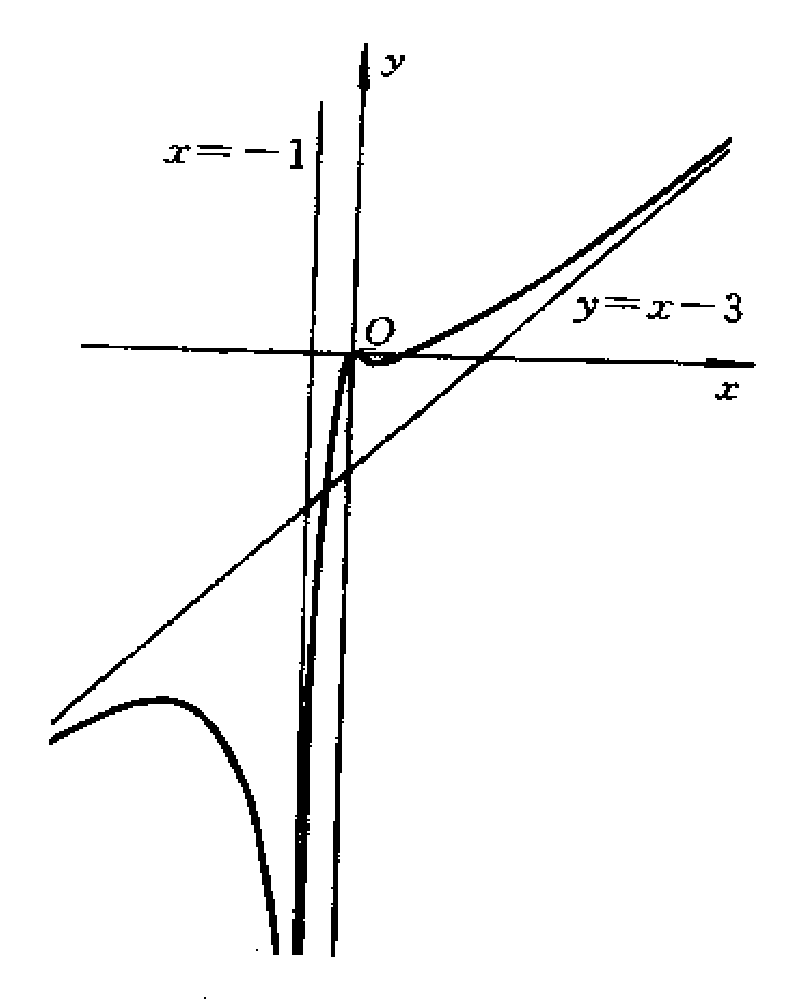


图 2.68

1480. $y=\frac{x}{(1-x^2)^2}$.

解 零点处：$x=0$. 间断点：$x=-1$ 及 $x=1$.

渐近线：$x=-1$，$x=1$ 及 $y=0$.

以 $-x$ 替代 x，y 的绝对值不变，符号改变，故图形关于原点对称.

$$y' = \frac{3x^2+1}{(1-x^2)^3}，令\ y' = 0，无实根.$$

$$y'' = \frac{12x(x^2+1)}{(1-x^2)^4}，令\ y'' = 0，得\ x = 0.$$

经判别知：无极值，$x = 0$ 为拐点(图 2.69).

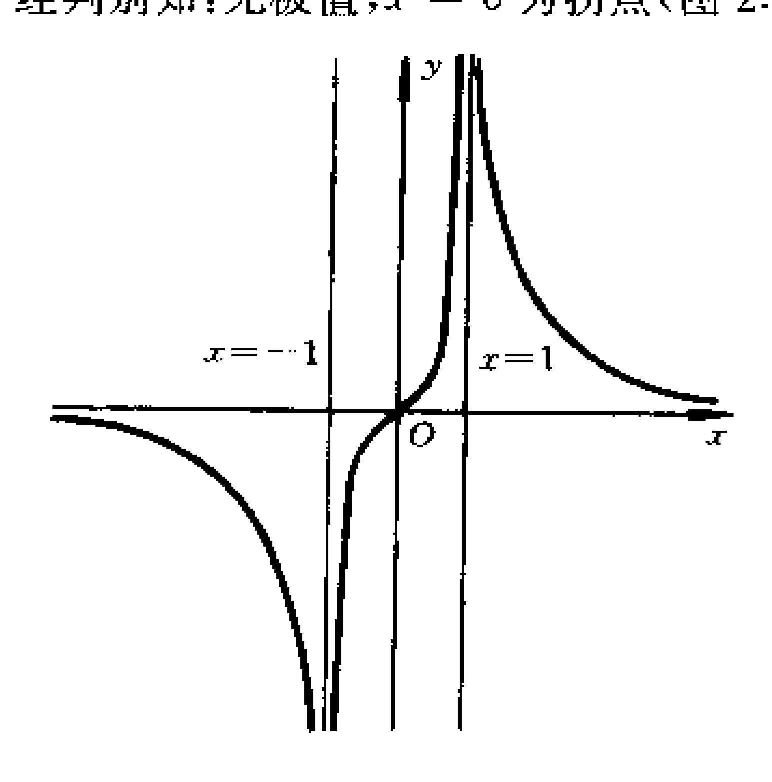


图 2.69

列表

x		-1		0		1	
y'	$-$	∞	$+$	$+$	$+$	∞	$-$
y''	$-$	∞	$-$	0	$+$	∞	$+$
y	↘	间断点	↗	拐点	↗	间断点	↘

1481. $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

解 零点处：$x=-1$. 间断点：$x=1$.

垂直渐近线：$x=1$；

斜渐近线：$y=x+5$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1, b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=5.$$

$y'=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$，令 $y'=0$ 得 $x=-1$ 或 5.

$y''=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$，令 $y''=0$ 得 $x=-1$.

列表

x		-1		1		5	
y'	+	0	+	∞	−	0	+
y''	−	0	+	∞	+	+	+
y	↗	拐点	↗	间断点	↘	极小点	↗

当 $x=-1$ 时，$y=0$；

当 $x=5$ 时，$y=13\frac{1}{2}$（图 2.70）.

1482. $y=\frac{x^4+8}{x^3+1}$.

解 垂直渐近线：$x=-1$；

斜渐近线：$y=x$. 事实上，

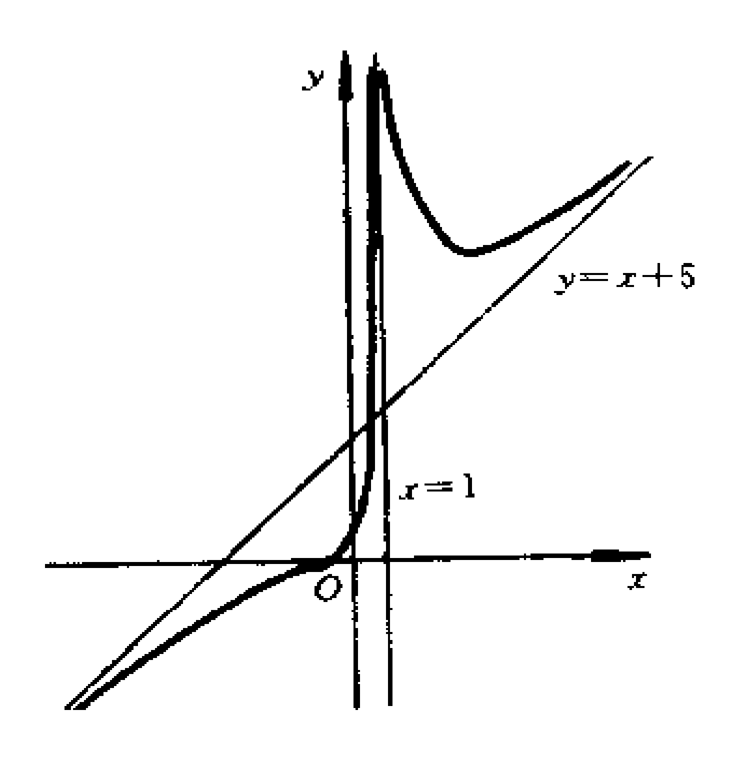


图 2.70

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1, b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=0.$$

$$y'=\frac{x^6+4x^3-24x^2}{(x^3+1)^2},$$

$$y''=\frac{-6x^5+96x^4+12x^2-48x}{(x^3+1)^3},$$

令 $y'=0$，得 $x=0,2$ 及 $x\approx-2.4$. $y'|_{x=2}>0$，故当 $x=2$ 时有极小值 $y=2\frac{2}{3}$；

$y''|_{x=-2.4}<0$；故当 $x\approx-2.4$ 时有极大值 $y\approx-3.2$.

经判别知：当 $x=0,0.752,16.006$ 时有拐点．渐近线 $y=x$ 与曲线交于点(8,8). 如图

2.71 所示.

1483. $y=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{10}{3x^2}+\dfrac{1}{1-x}$.

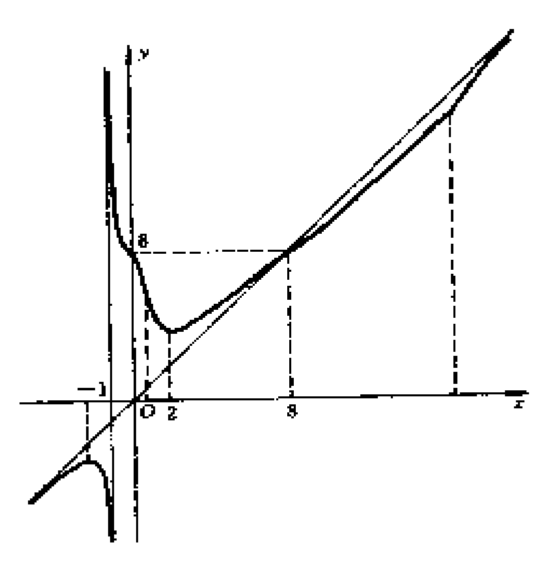


图 2.71

解 图形对于 Oy 轴对称.

零点处:$x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{4}\approx\pm0.79$.



y'

$\dfrac{4(8x^4-10x^2+5)}{3x^3(1-x^2)^2}$,

$y'=0$ 无实根,无极值点.

$$y''=\frac{4(8x^6-14x^4+15x^2-5)}{x^4(1-x^2)^3},$$

令 $y''=0$,得 $x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}\approx\pm0.71$.经判别,此为拐点,相应纵坐标 $y=-2\dfrac{2}{3}$.

渐近线:$x=0$,$x=-1$,$x=1$ 和 $y=0$.

当 $x>0$ 时,$y'>0$,曲线上升.

当 $0<x<0.71$ 时,$y''<0$,图形呈凸状.

当 $0.71<x<1$ 时,$y''>0$,图形呈凹状.

当 $1<x<+\infty$ 时,$y''<0$,图形呈凸状.

图形如图 2.72 所示.

1484. $y=(x-3)\sqrt{x}$.

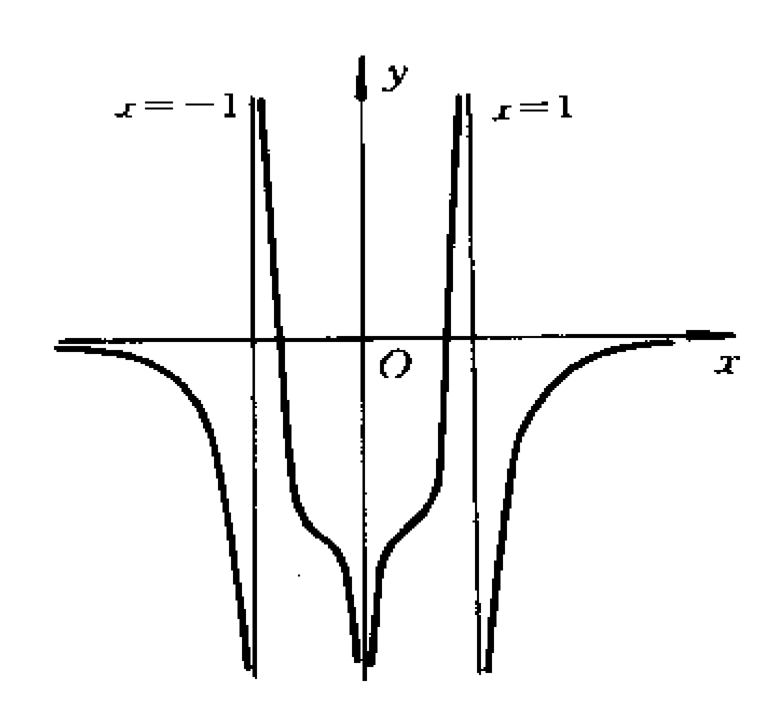


图 2.72

解　存在域：$0 \leqslant x < +\infty$.

零点处：$x = 0$ 和 $x = 3$.

$y' = \dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$，令 $y' = 0$ 得 $x = 1$；

$y'' = \dfrac{3(x+1)}{4x\sqrt{x}} > 0 \qquad (0 < x < +\infty)$，

所以图形始终是凹的．

由于 $y''|_{x=1} > 0$，故当 $x = 1$ 时有极小值 $y = -2$；当 $x = 0$ 时，由 $\lim\limits_{x\to 0+} y' = -\infty$ 知，曲线在 $x = 0$ 点与 y 轴相切，易见它有边界极大值 $y = 0$.

图形如图 2.73 所示．

1485. $y = \pm\sqrt{8x^2 - x^4}$.

解　存在域：需 $8 - x^2 \geqslant 0$，即 $|x| \leqslant 2\sqrt{2} \approx 2.83$.

零点处：$x = 0$ 和 $x = \pm 2\sqrt{2}$.

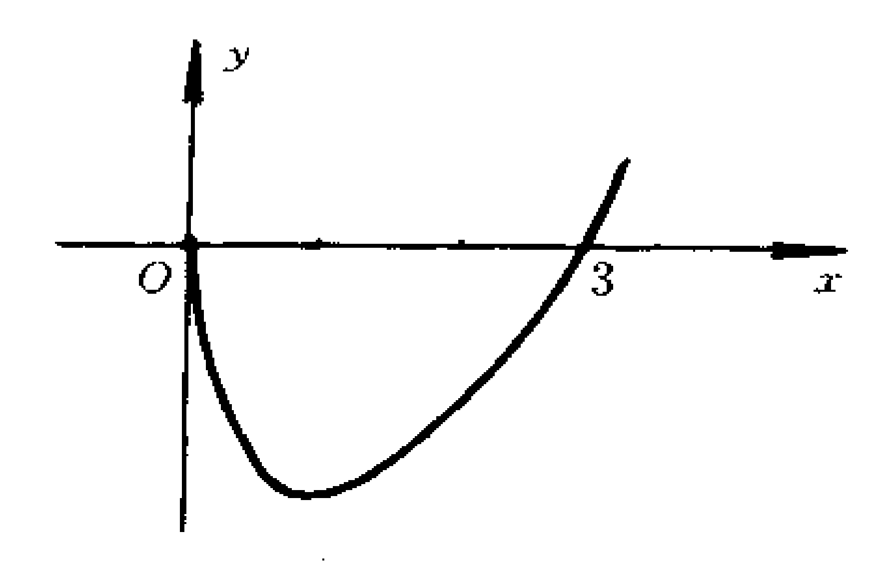


图 2.73

图形关于坐标原点及坐标轴对称.

下面就第一象限讨论之:

$y' = \frac{2(4-x^2)}{\sqrt{8-x^2}}$,令 $y'=0$ 得 $x=2$.

$y'' = \frac{2x(x^2-12)}{(8-x^2)^{\frac{3}{2}}}$,令 $y''=0$ 得 $x=2\sqrt{3}$ 或 $x=0$.

然而点 $x=2\sqrt{3}$ 不在存在域内,对于 $x=0$ 来说,如果将曲线由第三象限穿向第一象限看成一分支曲线的话.则也可理解为拐点,同样由第四象限到第二象限的那个分支也有同样情况,故曲线呈双纽状.

当 $0<x<2$ 时,$y'>0$,当 $2<x<2\sqrt{2}$ 时,$y<0$,故当 $x=2$ 时,有极大值 $y=4$.当 $x=2\sqrt{2}$ 及 $x=0$ 时,显然有极小值 $y=0$.

前者是边界的极小值,而且曲线在 $x=2\sqrt{2}$ 处以 $x=2\sqrt{2}$ 为垂直切线.图形如图 2.74 所示.

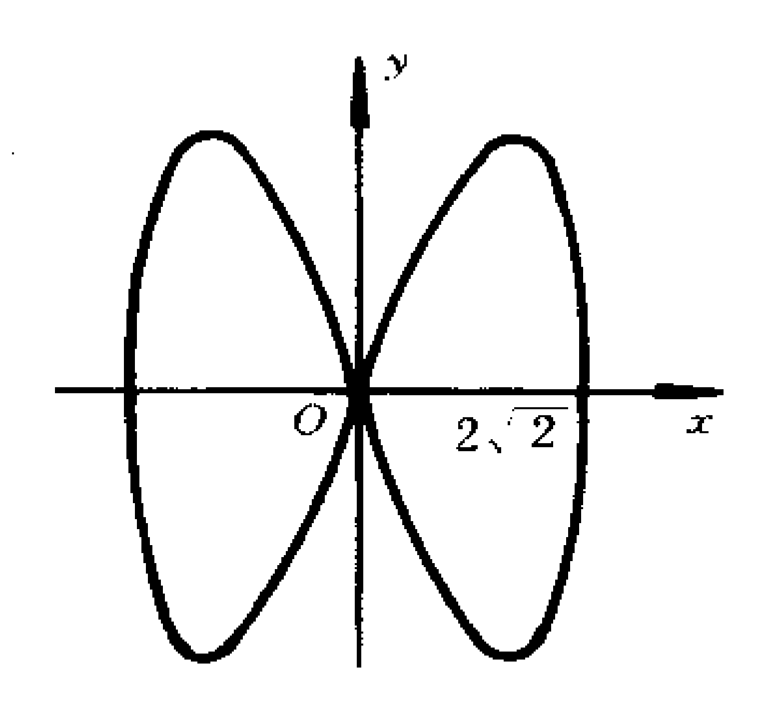


图 2.74

1486. $y=\pm\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

解 存在域:$1\leqslant x\leqslant 2$ 及 $3\leqslant x<+\infty$.

零点处:$x=1,x=2$ 和 $x=3$.

图形关于 Ox 轴对称. 下面就第一象限讨论之:

$$y'=\frac{3x^2-12x+11}{2\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}},$$令 $y'=0$,得 $x=\frac{6-\sqrt{3}}{3}\approx 1.42$ 经判别此时有极大值 $|y|=\frac{1}{3}\cdot\sqrt[4]{12}\approx 0.62$.

令 $y=0$ 解得 $x\doteq 3.468$,经判别是拐点.

当 $x>3$ 时,
$y'>0$,曲线上
升.

当 $x=1,2$

和 3 时有边界的极小值 $y=0$ 且 $y'=\infty$(图 2.75).

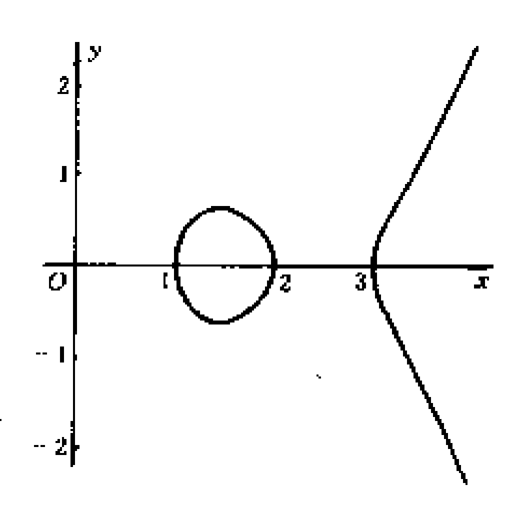


图 2.75

1487. $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$.

解 零点处:$x=-1$ 和 $x=1$. 又当 $x=0$ 时,$y=1$.

渐近线:$y=x-\dfrac{1}{3}$.

事实上,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1, b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=-\frac{1}{3}.$$

$$y'=\frac{3x^2-2x-1}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2-x+1)^2}},$$令 $y'=0$ 得

$x=-\dfrac{1}{3}$;当 $x=\pm1$ 时,$y'=\infty$.

$y''=\dfrac{-8}{9}\cdot\dfrac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}}}$,当 $x=\pm1$ 时,$y''=\infty$.

列表

x		-1		$-\frac{1}{3}$		1	
y'	+	∞	+	0	−	∞	+
y''	+	∞	−	−	−	∞	−
y	↗	拐点	↗	极大点	↘	极小点	↗

当 $x=-\dfrac{1}{3}$ 时,

1489. $y=(x+2)^{\frac{2}{3}}-(x-2)^{\frac{2}{3}}$.

解 以 $-x$ 替代 x, y 变成 $-y$, 故图形关于坐标原点对称.

渐近线: $y=0$.

零点处: $x=0$.

$y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}-(x+2)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}$, 当 $x=\pm 2$ 时, $y'=\infty$.

$y''=\frac{2}{9}\cdot\frac{(x+2)^{\frac{1}{3}}-(x-2)^{\frac{4}{3}}}{(x+2)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{4}{3}}}$, 令 $y''=0$ 得 $x=0$.

列表

x		-2		0		2	
y'	$-$	∞	$+$	$+$	$+$	∞	$-$
y''	$-$	∞	$-$	0	$+$	∞	$+$
y	↘	最小点	↗	拐点	↗	最大点	↘

当 $x=-2$ 时, 有最小值 $y=-\sqrt[3]{16}$;

当 $x=2$ 时, 有最大值 $y=\sqrt[3]{16}$.

图形如图 2.78 所示.

1490. $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{2}{3}}$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

$y'=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}\right]$, 令 $y'=0$ 得 $x=0$; 当 $x=\pm 1$ 时, $y'=\infty$.

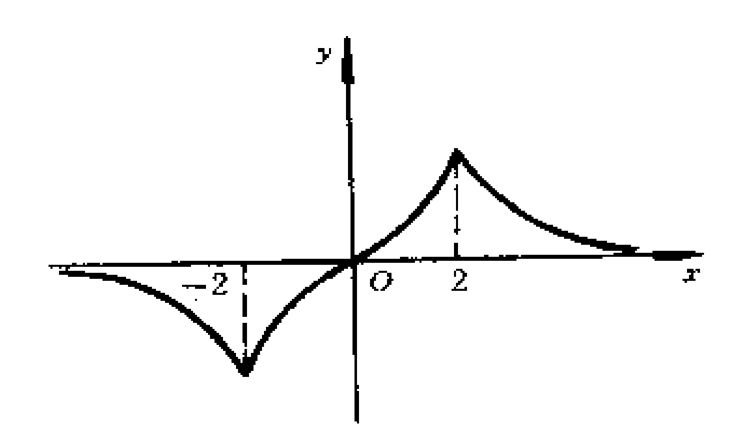


图 2.78

$$y'' = -\frac{2}{9}\left[\frac{1}{(x+1)^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}}\right] < 0,$$

图形始终呈凸状.

当 $x = \pm 1$ 时,取得最小值 $y = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$.

当 $x = 0$ 时,有极大值 $y = 2$.

图形如图 2.79 所示.

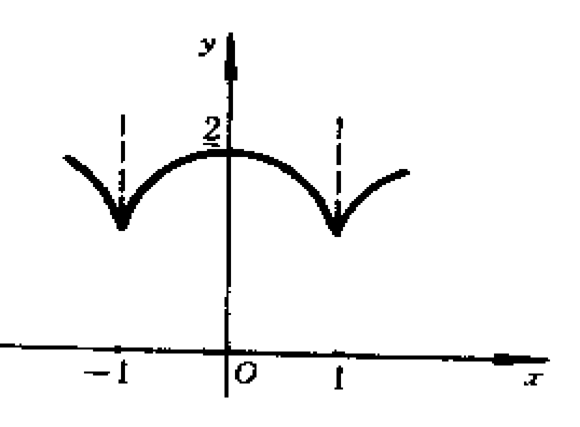


图 2.79

1491. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处:$x = 0$.

间断点:$x = \pm 1$.

$y' = \dfrac{x^2 - 3}{3(x^2 - 1)^{\frac{4}{3}}}$,令 $y' = 0$ 得 $x = \pm\sqrt{3}$. 当 $x = \pm 1$ 时,$y' = \infty$.

$y'' = -\dfrac{2x(x^2 - 9)}{9(x^2 - 1)^{\frac{7}{3}}}$,令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$ 或 ± 3.

列表

x		-3		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		3	
y'	+	+	+	0	−	∞	−	−	−	∞	−	0	+	+	+
y''	+	0	−	−	−	∞	+	0	−	∞	+	+	+	0	−
y	↗	拐点	↗	极大点	↘	间断点	↘	拐点	↘	间断点	↘	极小点	↗	拐点	↗

渐近线：$x=-1, x=1$.

当 $x=\pm\sqrt{3}$ 时，$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\approx\pm 1.38$；

当 $x=\pm 3$ 时，$y=\pm 1\dfrac{1}{2}$.

图形如图 2.80 所示.

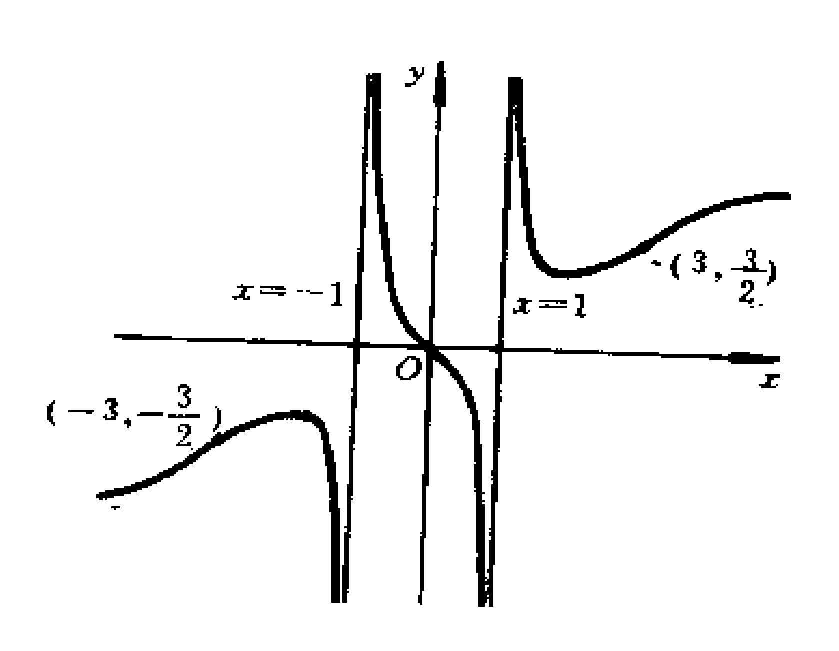


图 2.80

1492. $y=\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.

解　存在域：$|x|\geqslant 1$. 图形关于 Oy 轴对称，且位于 Ox 轴的上方．渐近线：$y=\pm\frac{x}{2}$.

$$y'=\frac{2x^5-3x^3+2x}{(2x^2-1)^2\sqrt{x^2-1}},$$

$$y''=\frac{1}{(2x^2-1)^3(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\cdot(-6x^4+3x^2+2).$$

当 $x>1$ 时，$y'>0$，$y''<0$，故曲线上升，图形呈凸状．

又当 $x=\pm 1$ 时，有边界的极小点 $y=0$（图 2.81）.

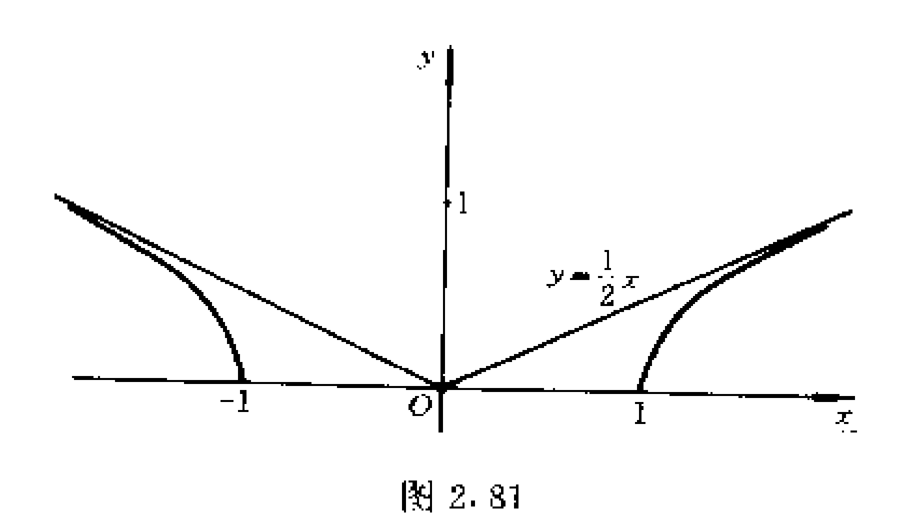


图 2.81

1493. $y=\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$.

解　存在域：$x>0$.

渐近线：$x=0$ 及 $y=x+\frac{3}{2}$.

$y'=\frac{(2x-1)\sqrt{x+1}}{2x\sqrt{x}}$，令 $y'=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$.

$$y'' = \frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}}} > 0,$$

故图形是凹的.

当 $x = \frac{1}{2}$ 时. 有极小值

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2.60.$$

图形如图 2.82 所示.

图 2.82

1494. $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$.

解 存在域: $x \geqslant 0$ 及 $x < -3$.

零点处: $x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \approx 4.30$.

斜渐近线: $y = \frac{5}{2} - 2x$. 事实上,

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = -2.$$

$$b = \lim_{x \to -\infty}(y - kx) = \lim_{x \to -\infty}\left(1 + x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - (x+1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x - 1} = \frac{5}{2}.$$

水平渐近线: $y = -\frac{1}{2}$. 事实上,

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty}(y - kx) = \lim_{x \to +\infty}\left(1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{x^3}{x+3} - (x-1)^2}{\sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}} + x - 1} = -\frac{1}{2}.$$

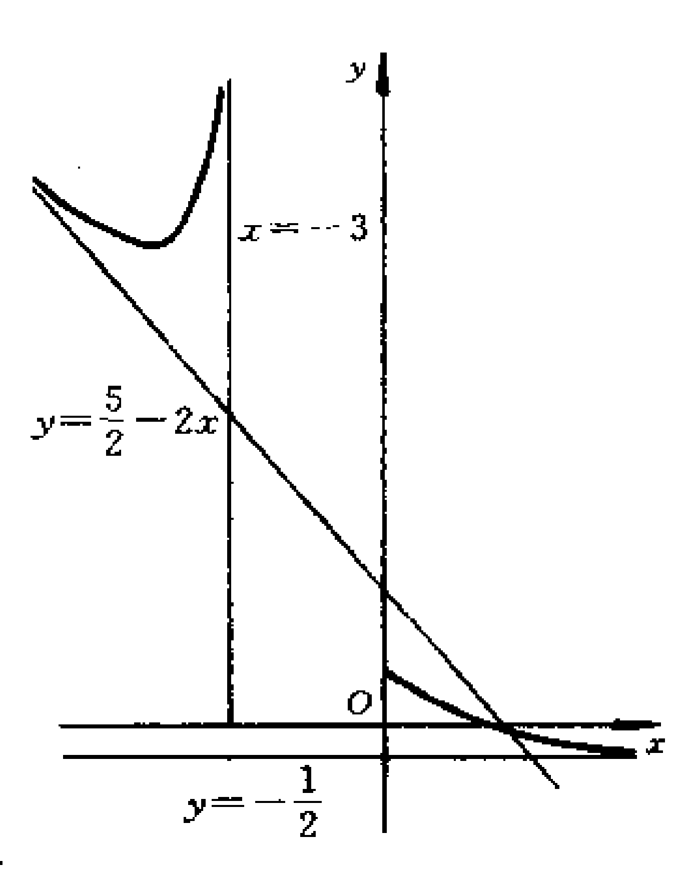


图 2.83

由于 $\lim\limits_{x \to -3} y = \infty$，故垂直渐近线为 $x = -3$.

$$y' = -1 + \frac{\sqrt{x}(2x+9)}{2(x+3)^{\frac{3}{2}}},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = -4$;



$$y'' = \frac{27}{4(x+3)^2 \sqrt{x(x+3)}} > 0,$$ 故图形呈凹状.

当 $x = -4$ 时有极小值 $y = 13$.

当 $x = 0$ 时有边界极大值 $y = 1$.

图形如图 2.83 所示.

1495. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$.

解 零点处: $x = 0$.

垂直渐近线: $x = -1$.

$$y' = \frac{x+2}{3(x+1)\sqrt[3]{x(x+1)}},$$

令 $y'=0$ 得 $x=-2$. 当 $x=0$ 时 $y'=\infty$.

$$y''=-\frac{2(x^2+4x+1)}{9x(x+1)^2\sqrt[3]{x(x+1)}},$$

令 $y''=0$ 得 $x=-2\pm\sqrt{3}$.

经判别:

当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$;

当 $x=-2$ 时有极大值 $y=-\sqrt[3]{4}\approx-1.59$.

拐点:

$x=-(2-\sqrt{3})\approx-0.27$,此时 $y\approx0.46$;

$x=-(2+\sqrt{3})\approx-3.73$,此时 $y\approx-1.72$.

图形如图 2.84 所示.

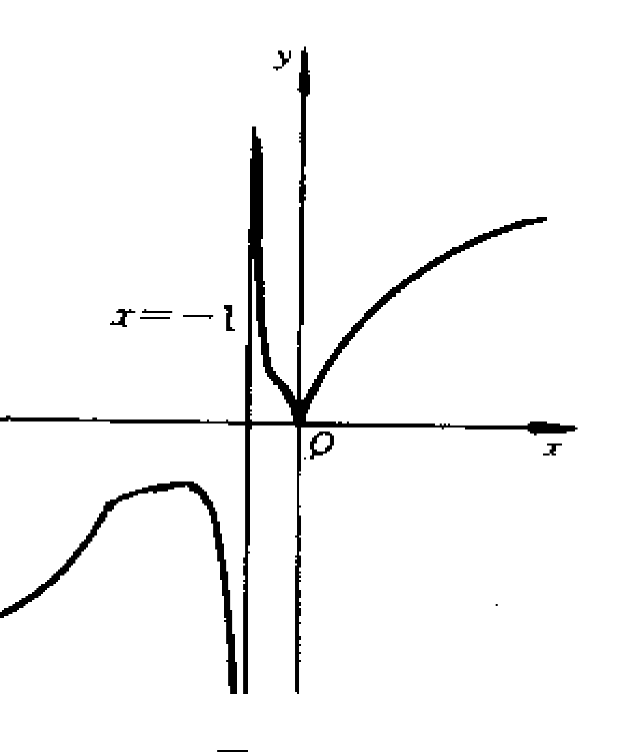


图 2.84

1496. $y=\sqrt{\dfrac{x^4+3}{x^2+1}}$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 函数值始终是正的.

渐近线:$y=\pm x$.

$$y'=\frac{x(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x^4+3)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 ± 1.

$$y''=\frac{-x^8+20x^6+18x^4+36x^2-9}{(x^4+3)^{\frac{3}{2}}(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

令 $y''=0$ 得 $x\approx\pm 0.47$ 或 ± 4.58,经判别均为拐点:

当 $x\approx\pm 0.47$ 时,$y\approx 1.58$;

当 $x\approx\pm 4.58$ 时,$y\approx 4.49$.

当 $x=0$ 时有极大值 $y=\sqrt{3}\approx 1.73$;

当 $x=\pm 1$ 时有极小值 $y=\sqrt{2}\approx 1.41$.

图形如图 2.85 所示.

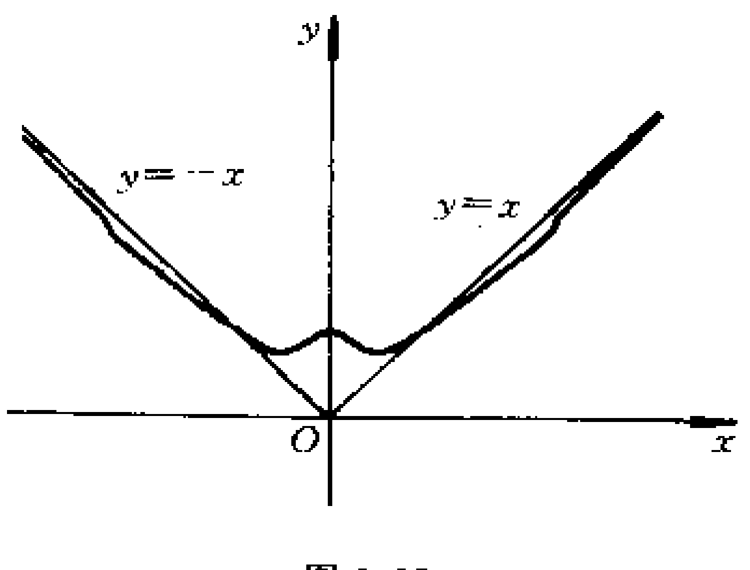


图 2.85

1497. $y=\sin x+\cos^2 x$.

解 函数的周期 $T=2\pi$. 在一周期 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 内的图形讨论如下:

零点处:$x=\pi+\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 1.21\pi$ 及

$x=2\pi-\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 1.79\pi$.

$$y' = \cos x(1 - 2\sin x),\text{令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = \frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6} \text{ 及} \frac{3\pi}{2};$$

$$y'' = -\sin x - 2\cos 2x,\text{令 } y'' = 0 \text{ 得}$$

$4\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$,

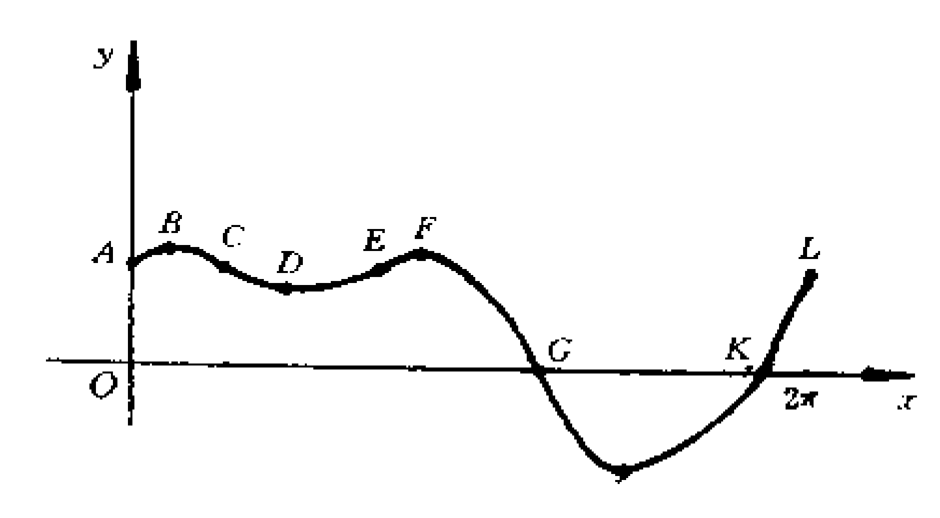


图 2.86

解之得

$$x_1 = \arcsin\frac{1 + \sqrt{33}}{8},\text{此时 } y_1 \approx 1.13;$$

$$x_2 = \pi - \arcsin\frac{1 + \sqrt{33}}{8},\text{此时 } y_2 \approx 1.13;$$

$$x_3 = \pi + \arcsin\frac{\sqrt{33} - 1}{8},\text{此时 } y_3 \approx 0.055;$$

$$x_4 = 2\pi - \arcsin\frac{\sqrt{33} - 1}{8},\text{此时 } y_4 \approx 0.055,$$

经判断：$x_1 \approx 0.32\pi, x_2 \approx 0.68\pi, x_3 \approx 1.20\pi, x_4 \approx 1.80\pi$ 均为拐点；

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时有极小值 $y = 1$；

当 $x = \frac{3\pi}{2}$ 时有极小值 $y = -1$；

$y_{2,3}\approx\pm 2.54$;

$x_{4,5}=\pm\pi$，此时 $y_{4,5}=0$.

经判别：点 x_1,x_2,x_3,x_4 和 x_5 均为拐点；

当 $x=-\arccos\frac{1}{4}$ 时有极小值 $y=-\frac{15}{8}\sqrt{15}\approx-7.3$;

当 $x=\arccos\frac{1}{4}$ 时有极大值 $y=\frac{15}{8}\sqrt{15}\approx 7.3$.

图形如图 2.87 所示，图中主要点的坐标：

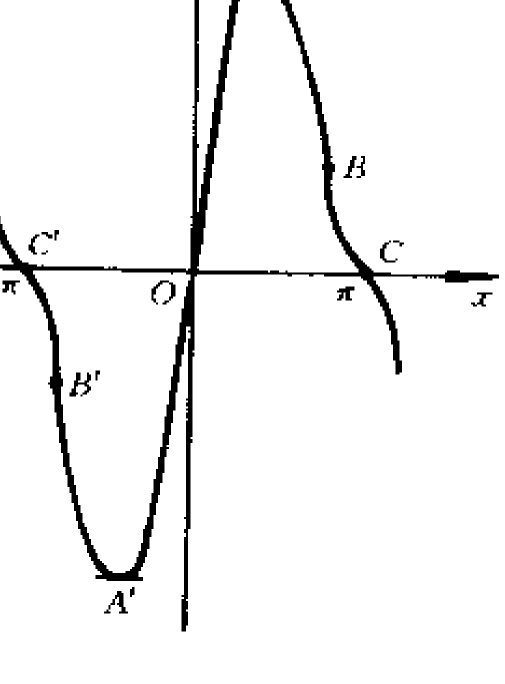


图 2.87

$A(0.42\pi,7.3)$，$B(0.84\pi,2.54)$，$C(\pi,0)$；$A'(-0.42\pi,-7.3)$，$B'(-0.84\pi,-2.54)$，$C'(-\pi,0)$.

1499. $y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$.

解 图形关于坐标原点对称．函数的周期 $T=2\pi$. 在一周期 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 内讨论图形．

零点处：$x=0$ 或 $\pm\pi$.

$y'=\cos x+\cos 3x$，令 $y'=0$ 得

$$x=-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4};$$

$y''=-\sin x-3\sin 3x$,

令 $y''=0$ 得

$x_1 = 0, y_1 = 0$;

$x_{2,3} = \pm \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}} \approx \pm 0.37\pi$,

$y_{2,3} = \pm \frac{4}{27}\sqrt{30} = \pm 0.81$;

$x_{4,5} = \pm\left(\pi - \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}\right) \approx \pm 0.63\pi$,

$y_{4,5} = \pm \frac{4}{27}\sqrt{30} = \pm 0.81$;

$x_{6,7} = \pm \pi, y_{6,7} = 0$.

经判别：点 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 和 x_7 均为拐点；

极小值：当 $x = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$ 时，$y = -\frac{2}{3}\sqrt{2} \approx -0.94$；

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时，$y = \frac{2}{3}$；

极大值：当 $x = -\frac{\pi}{2}$ 时，$y = -\frac{2}{3}$；

当 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ 时，$y = \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0.94$.

图形如图 2.88 所示，图中主要点的坐标：

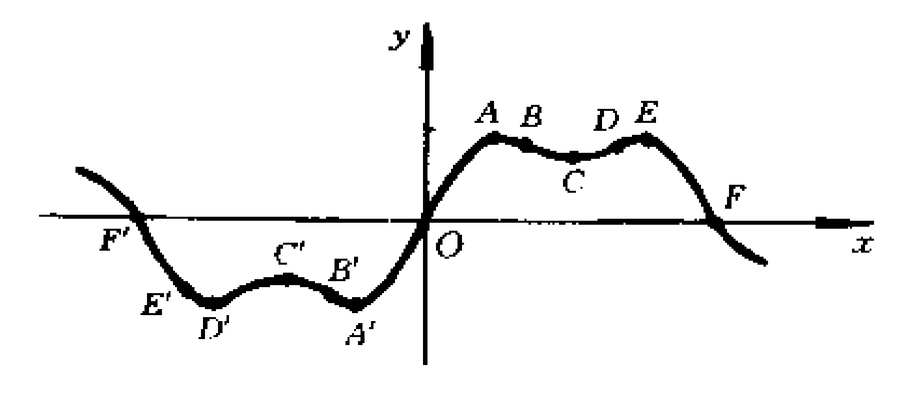


图 2.88

$A\left(\frac{\pi}{4}, 0.94\right), B(0.37\pi, 0.81), C\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\right)$,

$D(0.63\pi, 0.81), E\left(\frac{3\pi}{4}, 0.94\right)$ 和 $F(\pi, 0)$；

点 A', B', C', D', E', F'，和点 A, B, C, D, E, F 关于原点对称．

1500. $y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$.

解 图形关于 Oy 轴对称．函数的周期 $T = 2\pi$. 在一周期 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 内讨论图形．

零点处：$x = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \approx \pm 0.62\pi$.

$y' = -\sin x + \sin 2x$，令 $y' = 0$ 得

$$x = 0, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \pi.$$

$y'' = -\cos x + 2\cos 2x$，令 $y'' = 0$ 得

$x_{1,2} = \pm \arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \approx \pm 0.18\pi, y_{1,2} \approx 0.63$；

$x_{3,4} = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \approx \pm 0.70\pi, y_{3,4} \approx -0.44$.

经判别：点 x_1, x_2, x_3 和 x_4 均为拐点；

当 $x = 0$ 时有极小值 $y = \frac{1}{2}$；

当 $x = \pm \pi$ 时有极小值 $y = -\frac{3}{2}$；

当 $x = \pm \frac{\pi}{3}$ 时有极大值 $y = \frac{3}{4}$.

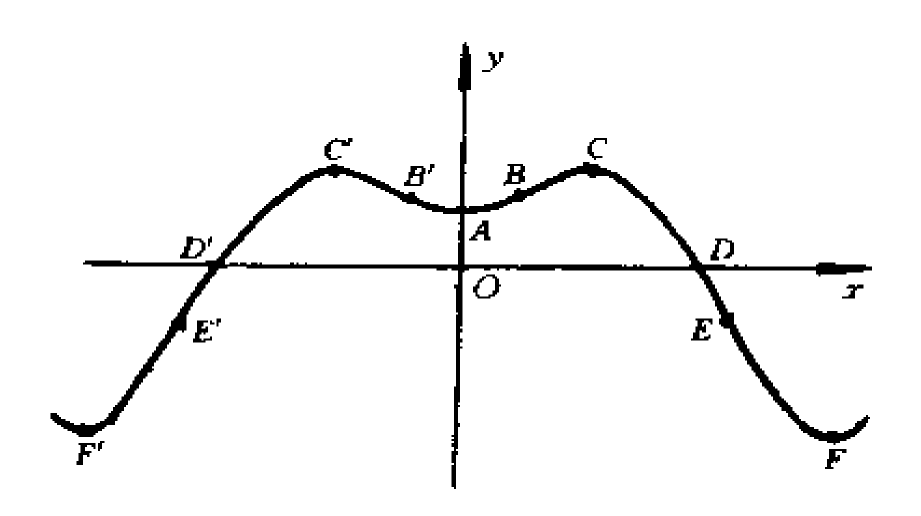


图 2.89

图形如图 2.89 所示，图中主要点的坐标：

$$A\left(0,\frac{1}{2}\right),B(0.18\pi,0.63),C\left(\frac{\pi}{3},\frac{3}{4}\right),$$

$D(0.62\pi,0)$，$E(0,70\pi,-0.44)$，$F\left(\pi,-\frac{3}{2}\right)$；

点 B'，C'，D'，E'，F'，与点 B，C，D，E，F 关于 Oy 轴对称.

1501. $y=\sin^4x+\cos^4x$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

由于

$$\begin{aligned}y&=\sin^4x+\cos^4x\\&=\left(\frac{1-\cos2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos2x}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{4}(3+\cos4x),\end{aligned}$$

故函数的周期 $T=\frac{\pi}{2}$. 在一周期 $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$ 内讨论图形.

$$y'=-\sin4x.\ 令\ y'=0,得\ x=0\ 或\ \pm\frac{\pi}{4}.$$

$$y'' = -4\cos 4x. \text{令 } y''=0, \text{得 } x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{8},$$

$y_{1,2} = \frac{3}{4}$.

经判别：点 x_1 和 x_2 均为拐点；

当 $x=0$ 时有极大值 $y=1$；

当 $x=\pm\frac{\pi}{4}$ 时有极小值 $y=\frac{1}{2}$.

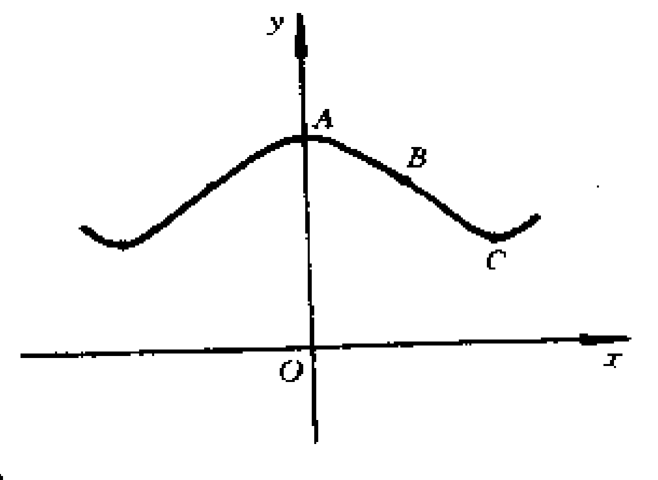


图 2.90

图形如图 2.90 所示，



图中主要点的坐标：

$$A(0,1), B\left(\frac{\pi}{8},\frac{3}{4}\right) \text{和 } C\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right).$$

1502. $y=\sin x\cdot\sin 3x$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

由于

$y=\sin x\sin 3x=-(\cos 2x-\frac{1}{4})^2+\frac{9}{16}$，故函数的周期 $T=\pi$. 在一周期 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内讨论图形.

零点处：$x=0$ 或 $\pm\frac{\pi}{3}$.

$y'=2\sin 4x-\sin 2x$，令 $y'=0$ 得

$x=0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}$.

$y''=8\cos 4x-2\cos 2x$，令 $y''=0$ 得

$$x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{129}}{16}\approx\pm 0.11\pi,$$

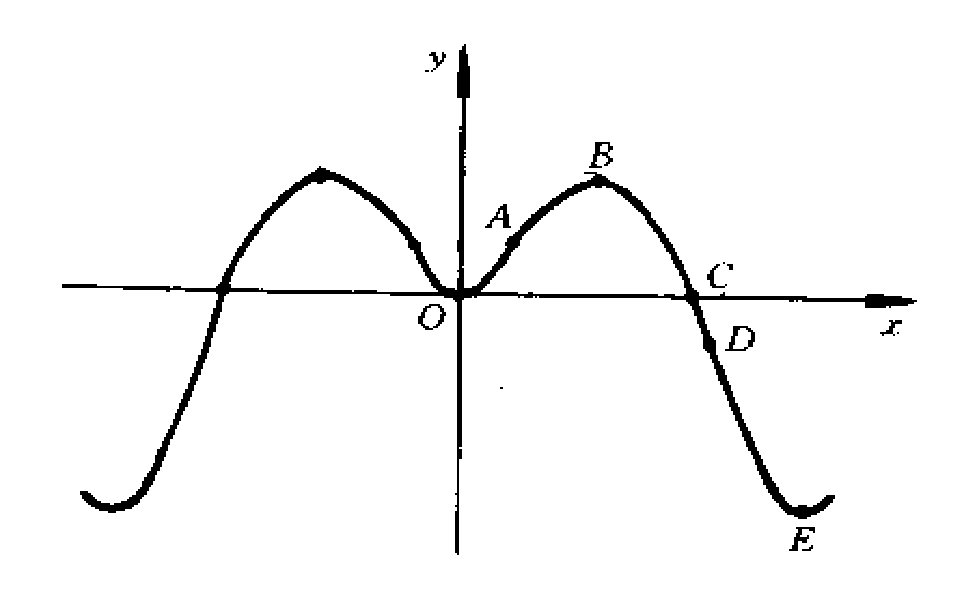


图 2.91

$y_{1,2} \approx 0.29$;

$$x_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{129}}{16} \approx \pm 0.36\pi,$$

$y_{3,4} \approx -0.24$.

经判别：点 x_1, x_2, x_3 和 x_4 均为拐点；

极小值：当 $x = 0$ 时 $y = 0$，

当 $x = \pm \frac{\pi}{2}$ 时，$y = -1$；

极大值：当 $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} \approx \pm 0.21\pi$ 时，$y = \frac{9}{16}$

图形如图 2.91 所示，图中主要点的坐标：

$A(0.11\pi, 0.29)$，$B\left(0.21\pi, \frac{9}{16}\right)$，$C\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$，

$D(0.36\pi, -0.24)$，$E\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$.

1503. $y = \dfrac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

解 利用 $\sin(\pi+x)=-\sin x$，易知函数的周期 $T=\pi$.

在一周期 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 内讨论图形.

不连续点：$x=\dfrac{3\pi}{4}$.

零点处：$x=0$ 或 π.

渐近线：$x=\dfrac{3\pi}{4}$.

$$y'=\frac{\sin\dfrac{\pi}{4}}{\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}>0,$$

无极值，函数图形上升.

$$y''=-\frac{2\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin^3\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)},$$

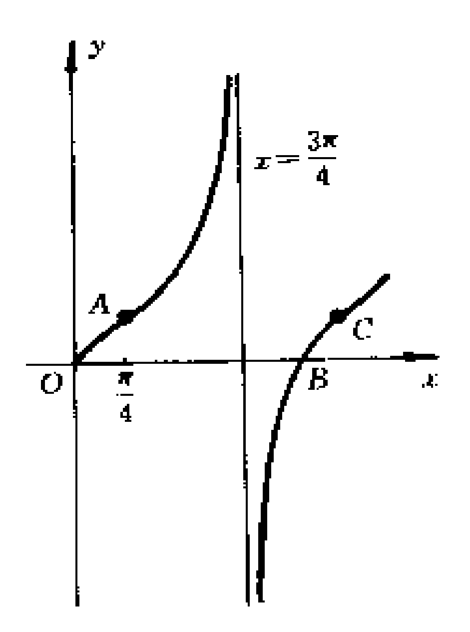


图 2.92

令 $y''=0$ 得 $x=\dfrac{\pi}{4}$，对应的 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 经判别为拐点.

图形如图 2.92 所示，图中主要点的坐标：

$$A\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),B(\pi,0)\text{ 和 }C\left(\frac{5\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

1504. $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 函数的周期 $T=2\pi$. 在一周期 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 内讨论图形.

零点处：$x=\pm\dfrac{\pi}{2}$.

渐近线：$x=\pm\dfrac{\pi}{4}$

及 $x=\pm\dfrac{3\pi}{4}$.

$y'=\dfrac{\sin x(1+2\cos^2x)}{\cos^2 2x}$,

令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 $\pm\pi$;

$y''=\dfrac{1}{\cos^3 2x}[3\cos x\cos^2 2x+4\sin 2x\sin x(1+2\cos^2x)]$,

令 $y''=0$ 得 $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$.

经判别:当 $x=0$ 时有极小值 $y=1$;

当 $x=\pm\pi$ 时有极大值 $y=-1$;

点 $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 均为拐点,此时 $y=0$.

当 $0<x<\pi$ 时,$y'>0$,曲线上升;

当 $-\pi<x<0$ 时,$y'<0$,曲线下降.

图形如图 2.93 所示.

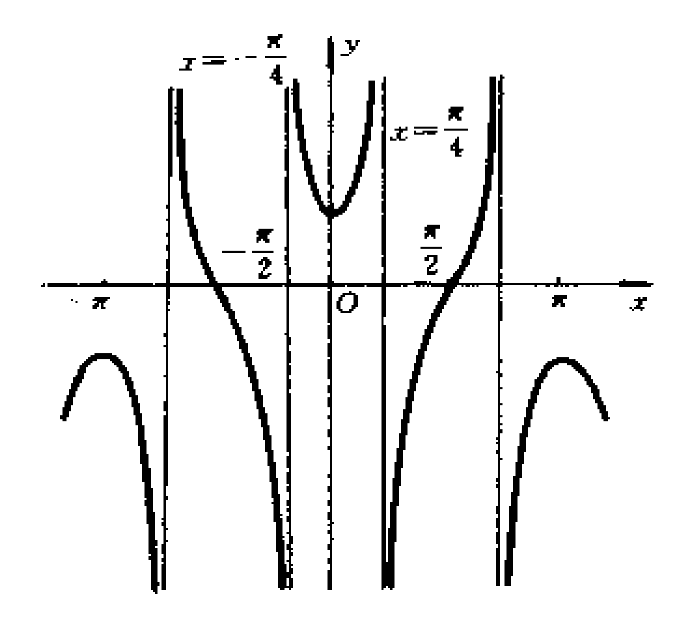


图 2.93

1505. $y=2x-\mathrm{tg}x$.

解 零点处：$x=0$ 及 $x\approx\pm 0.37\pi$. ……

对称中心：$(k\pi,2k\pi)(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

渐近线：$x=\dfrac{2k+1}{2}\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

$y'=2-\sec^2 x$，令 $y'=0$ 得

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ 或 } x=-\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right).$$

经判别：当 $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ 时，有极大值 $y=\dfrac{\pi}{2}-1+2k\pi$；

当 $x=-\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)$ 时，有极小值 $y=-\left(\dfrac{\pi}{2}-1+2k\pi\right)(k=0,1,2,\cdots)$.

$y''=-2\sec^2 x\operatorname{tg}x$，令 $y''=0$ 得 $x=k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

经判别此为拐点．图形如图 2.94 所示

（仅描绘从 $-\dfrac{3\pi}{2}$ 到$\dfrac{3\pi}{2}$ 区间内的图形）.

1506. $y=e^{2x-x^2}$.

解 函数值始终为正的，故图形在 Ox 轴的上方．

$y=e^{-(x-1)^2+1}$，于是图形关于直线 $x=1$ 对称．

渐近线：$y=0$.

$y'=(2-2x)\cdot e^{2x-x^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=1$，经判别知此时有极大值 $y=e$；

$y''=2(2x^2-4x+1)e^{2x-x^2}$，令 $y''=0$ 得 $x=1\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，经判别为拐点，$y=\sqrt{e}\approx 1.65$.

图形如图 2.95 所示，图中各点的位置：

$D\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right)$.

1507. $y=(1+x^2)e^{-x^2}$.

解 图形关于 Oy 轴对称，在 Ox 轴的上方．

渐近线：$y=0$.

$y'=-2x^3e^{-x^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=0$，经过 $x=0$ 点，导数 y' 从正变负，所以当 $x=0$ 时取极大值 $y=1$.

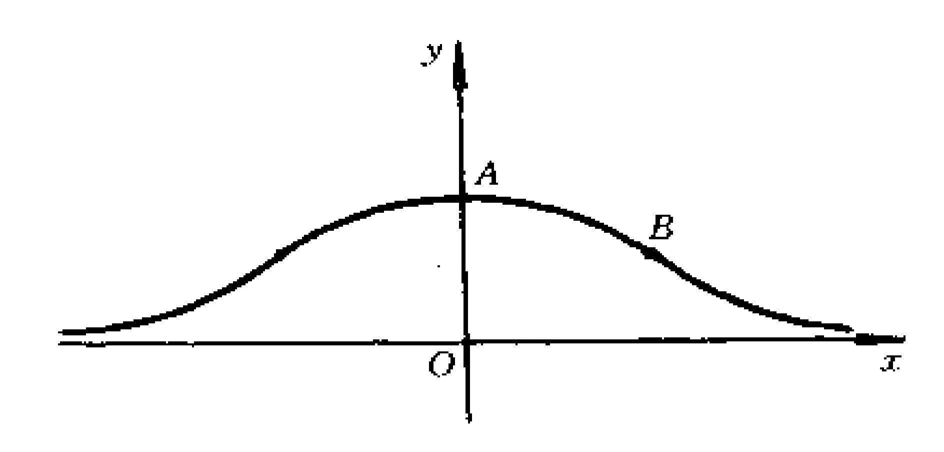


图 2.96

$y''=2x^2e^{-x^2}(2x^2-3)$，令 $y''=0$ 得 $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\approx\pm 1.22$，经判别为拐点，而 $y=\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}}\approx 0.56$.

图形如图 2.96 所示，图中主要点的坐标：

$A(0,1)$，$B(1.22,0.56)$.

1508. $y=x+e^{-x}$.

解 $y'=1-e^{-x}$，令 $y'=0$ 得 $x=0$，$y=1$.

$y''=e^{-x}>0$，图形向上凹，故当 $x=0$ 时有极小值 $y=1$.

斜渐近线：$y=x$. 事实上，

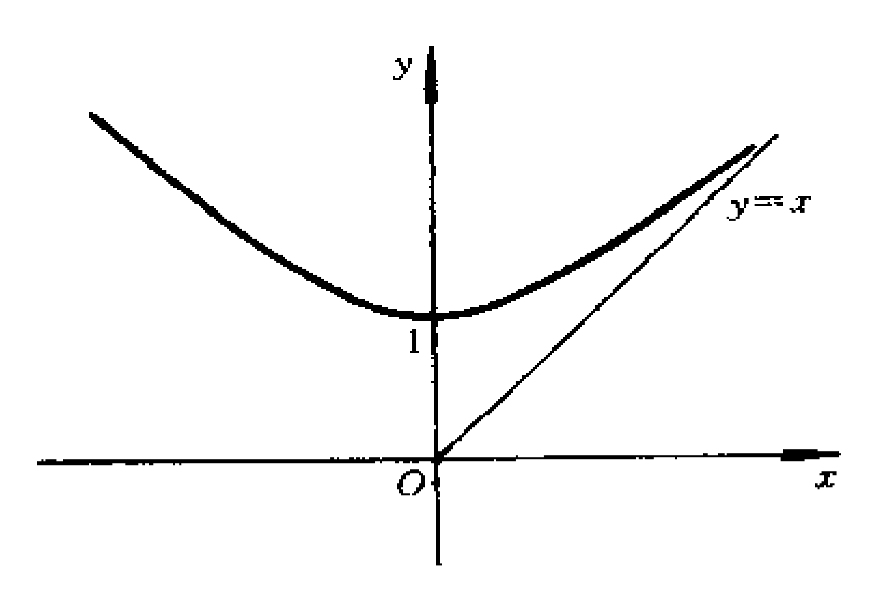


图 2.97

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=1, b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=0.$$

图形如图 2.97 所示．

1509. $y=x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$.

解　零点处：$x=0$.

渐近线：

$y=0$(当 $\to+\infty$ 时).

$y'=-x^{-\frac{1}{3}}e^{-x}\left(x-\frac{2}{3}\right)$,

令 $y'=0$ 得 $x=\frac{2}{3}$，当 $x=0$ 时，$y'=\infty$.

经判别：当 $x=0$ 有极小值 $y=0$，且(0,0)点为尖点．

$$当\ x=\frac{2}{3}\ 时有极大值\ y=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-\frac{2}{3}}\approx 0.39.$$

由此可知函数值始终为正的，故图形在 Ox 轴上方．

$y''=\frac{1}{9}e^{-x}x^{-\frac{4}{3}}(9x^2-12x-2)$，令 $y''=0$，得

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{6}}{3} \approx -0.15, y_1 \approx 0.33,$$

$$x_2 = \frac{2+\sqrt{6}}{3} \approx 1.48, y_2 \approx 0.30,$$

经判别均为拐点.

图形如图 2.98 所示，图中主要点的坐标：

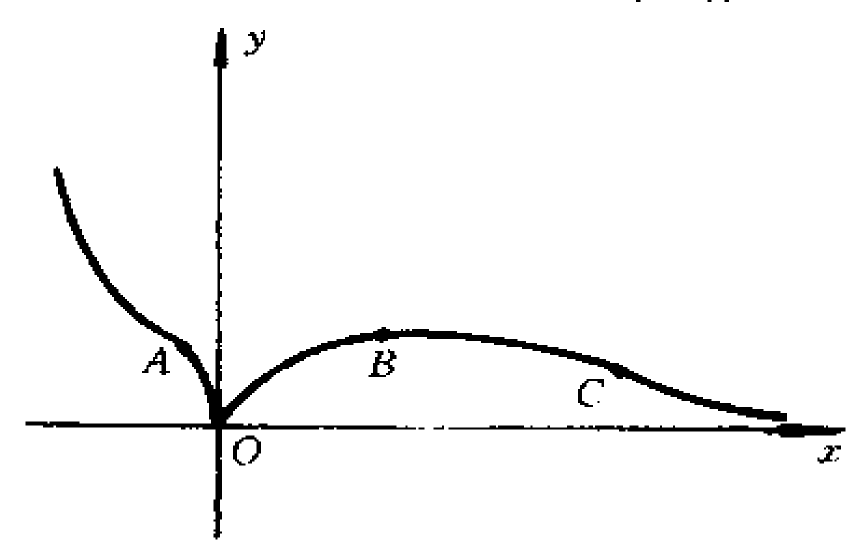


图 2.98

$A(-0.15, 0.34), B(\frac{2}{3}, 0.39), C(1.48, 0.30)$.

1510. $y = \frac{e^x}{1+x}$.

解 当 $x < -1$ 时，函数值为负的，

当 $x > -1$ 时，函数值为正的.

不连续点：$x = -1$. 垂直渐近线：$x = -1$.

又水平渐近线：$y = 0$（当 $x \to -\infty$ 时）. 事实上，

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = 0, b = \lim_{x \to -\infty} (y - kx) = 0.$$

$$y' = \frac{xe^x}{(1+x)^2},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$.

经判别知此时有极小值

$y=1$.

$$y''=\frac{e^x(x^2+1)}{(1+x)^3},$$

当 $x<-1$ 时，$y''<0$，故图形是凸的；

当 $x>-1$ 时，$y''>0$，故图形是凹的.

图形如图 2.99 所示.

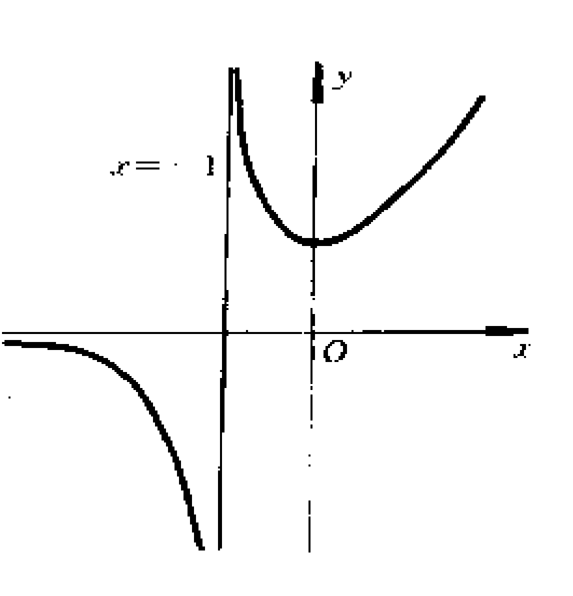


图 2.99



1511. $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

零点处：$x=0$.

函数值不为负.

当 $x=0$ 时有最小值 $y=0$.

渐近线：$y=1$.

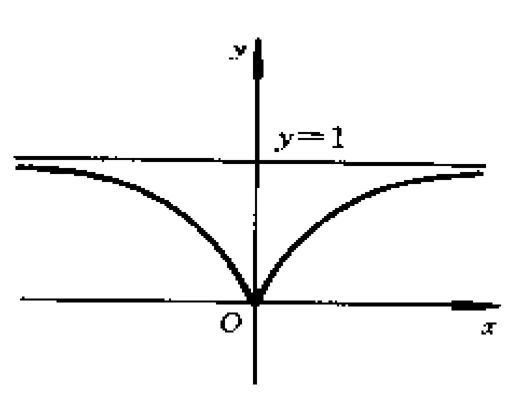


图 2.100

$$y'=\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}.$$

当 $x<0$，$y'<0$；当 $x>0$，$y'>0$.

$$y''=e^{-x^2}\frac{1-3x^2-e^{-x^2}+2x^2e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})\sqrt{1-e^{-x^2}}}.$$

令 $g(t)=1-3t-e^{-t}+2te^{-t}(0\leqslant t<+\infty)$，易证 $g(t)\leqslant 0$. 于是，对于 $x\neq 0$，恒有 $y''<0$，即图形呈凸状. 而 $(0,0)$ 点为尖点(图 2.100).

1512. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

解　存在域：$x > 0$.

零点处：$x = 1$.

渐近线：$x = 0\ (x \to +0)$，$y = 0\ (x \to +\infty)$.

$$y' = \frac{2 - \ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}, \text{令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = e^2 \approx 7.39.$$

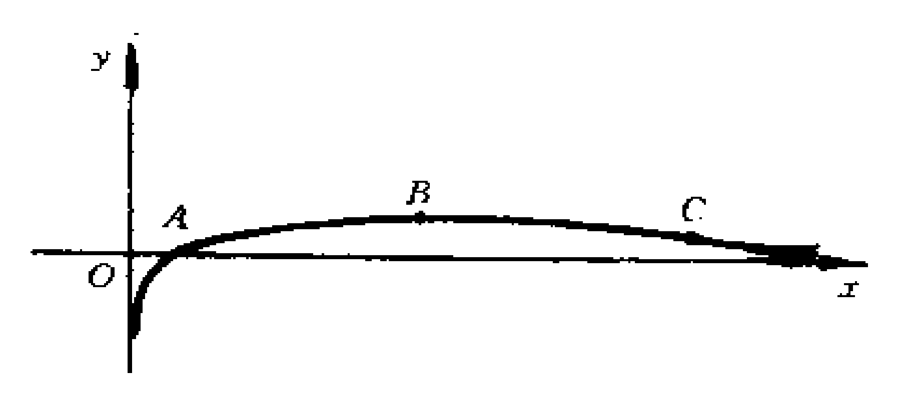


图 2.101

经判别知此时有极大值 $y = \dfrac{2}{e} \approx 0.74$.

$$y'' = \frac{3\ln x - 8}{4x^{\frac{5}{2}}}, \text{令 } y'' = 0 \text{ 得}$$

$$x = e^{\frac{8}{3}} \approx 14.39,$$

经判别此为拐点，此时 $y = \dfrac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}} \approx 0.70$.

图形如图 2.101 所示．图中主要点的坐标：

$A(1,0)$，$B(7.39,0.74)$，$C(14.39,0.70)$.

1513. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

解　由于 $\ln(\sqrt{x^2+1} - x) = -\ln(x + \sqrt{x^2+1})$，

故图形关于坐标原点对称．

零点处：$x = 0$.

$y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$，故图形始终上升，无极值点．

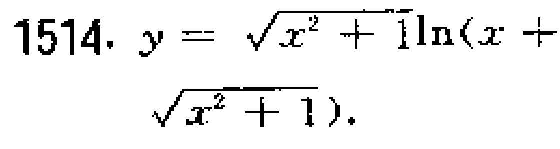
$$y'' = \frac{-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

令 $y''=0$，得 $x=0$，

在此点切线斜率为 $k=1$.

经判别此为拐点，此时 $y=0$.

图形如图 2.102 所示.



1514. $y=\sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.



图 2.102

解 图形关于坐标原点对称.

零点处：$x=0$.

$$y' = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

$$y'' = \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})+x\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

当 $x>0$ 时，$y''>0$，故图形是凹的.

图 2.103

当 $x<0$ 时，由对称性知图形是凸的.

于是得知 $O(0,0)$ 为拐点，在此点切线斜率为 $k=1$.

从而，函数图形始终上升，如图 2.103 所示.

1515. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处：$x=0$.

存在域：$|x|<1$.

渐近线：$x=\pm 1$.

$$y'=\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}>0\ (|x|<1),$$

故图形始终上升.

$$y''=\frac{3x}{(1-x^2)^2}+\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

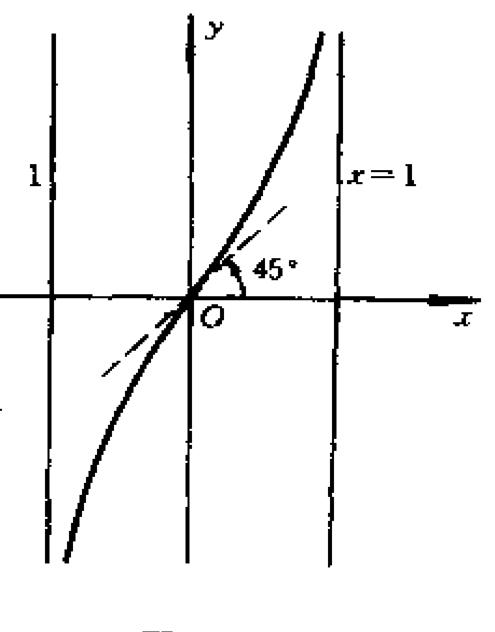


图 2.104

令 $y''=0$ 得 $x=0$.



当 $-1<x<0$ 时，$y''<0$，故图形是凸的，

当 $0<x<1$ 时，$y''>0$，故图形是凹的，$O(0,0)$ 为拐点处，在此点切线斜率为 $k=1$.

图形如图 2.104 所示.

1516. $y=x+\operatorname{arc\,tg}x$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处：$x=0$.

渐近线：$y=x-\frac{\pi}{2}$，$y=x+\frac{\pi}{2}$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1,\ b_1=\lim_{x\to-\infty}(x-kx)=-\frac{\pi}{2},\ b_2=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\frac{\pi}{2}.$$

$$y'=1+\frac{1}{1+x^2}>0,$$

故图形始终上升，无极值点．

$$y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

令 $y''=0$ 得 $x=0$，判别知为拐点，在此点切线斜率为 $k=2$.

图形如图 2.105 所示．

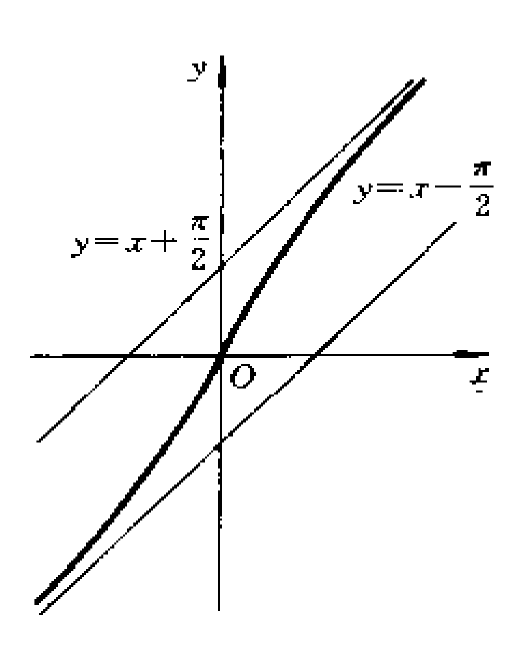


图 2.105

1517. $y=\frac{x}{2}+\operatorname{arc\,ctg}x$.

解　零点处：$x\approx-5.95$.

渐近线：$y=\frac{x}{2}+\pi$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{2}+\operatorname{arc\,ctg}x}{x}=\frac{1}{2}.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{x}{2}+\operatorname{arc\,ctg}x\right)-\frac{1}{2}x\right]=\pi;$$

同法还可得渐近线 $y=\frac{x}{2}$（当 $x\to+\infty$ 时）.

$$y'=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x^2},\text{令 } y'=0 \text{ 得 } x=\pm1.$$

当 $x<-1$ 及当 $x>1$ 时，$y'>0$，曲线上升；

当 $-1<x<1$ 时，$y'<0$，曲线下降；

故当 $x=1$ 时有极小值 $y=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\approx1.285$，当 $x=-1$ 时有极大值 $y=-\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}\approx1.856$.

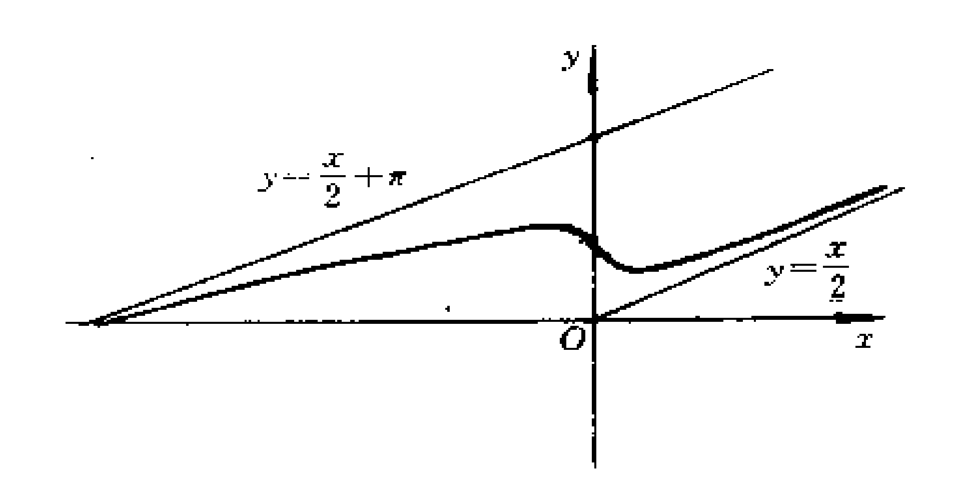


图 2.106

$$y''=\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \text{令 } y''=0 \text{ 得 } x=0.$$

当 $x<0$ 时，$y''<0$，故图形是凸的．

当 $x>0$ 时，$y''>0$，故图形是凹的．

从而有拐点 $x=0$，此时 $y=\frac{\pi}{2}$，$y'=-\frac{1}{2}$．

图形如图 2.106 所示．

1518. $y=x\operatorname{arctg}x$.

解　零点处：$x=0$.

图形关于 Oy 轴对称．

函数值不为负，故图形始终在 Ox 轴上方．

渐近线：

$$y=-\frac{\pi}{2}x-1 \text{（当 } x\to-\infty \text{ 时）；}$$

$$y=\frac{\pi}{2}x-1 \text{（当 } x\to-\infty \text{ 时）.}$$

$$y'=\frac{x}{1+x^2}+\operatorname{arc\,tg}x,$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$.

当 $x<0$ 时，$y'<0$，图形下降；当 $x>0$ 时，$y'>0$，图

当 $x=0$ 时，$y'=1$.

又点 $x=0$ 为拐点.

图形如图 2.108 所示.

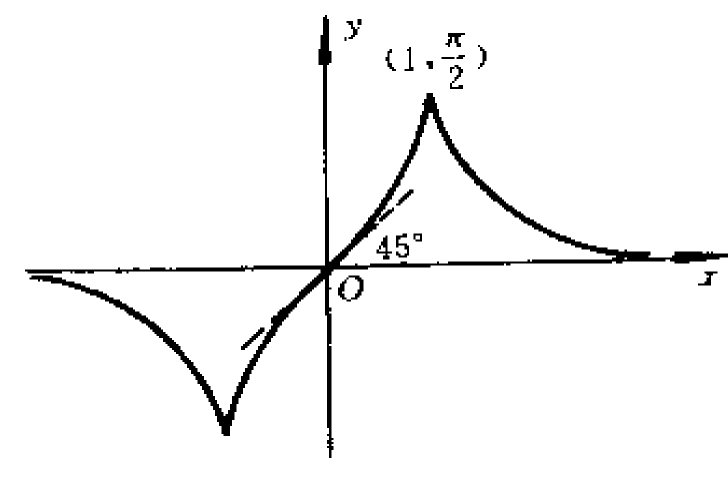


图 2.108

1520. $y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解 零点处：$x=0$.

图形关于 Oy 轴对称.

函数值不为负，故图形始终在 Ox 轴上方.

渐近线：$y=\pi$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}}{x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=\pi.$$

$y'=\frac{2}{1+x^2}>0\ (x>0)$，图形上升.

当 $x=0$ 时，直接从定义出发，得

$$y'_+(0)=2.$$

由对称性知，$y'_{-}(0)=-2$，且当 $x<0$ 时，图形下降，故当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$. 此点为角点.

$y''=-\frac{4x}{(1+x^2)^2}<0\ (x>0)$，图形是凸的.

由对称性知，当 $x<0$ 时，图形也是凸的.

图形如图 2.109 所示.

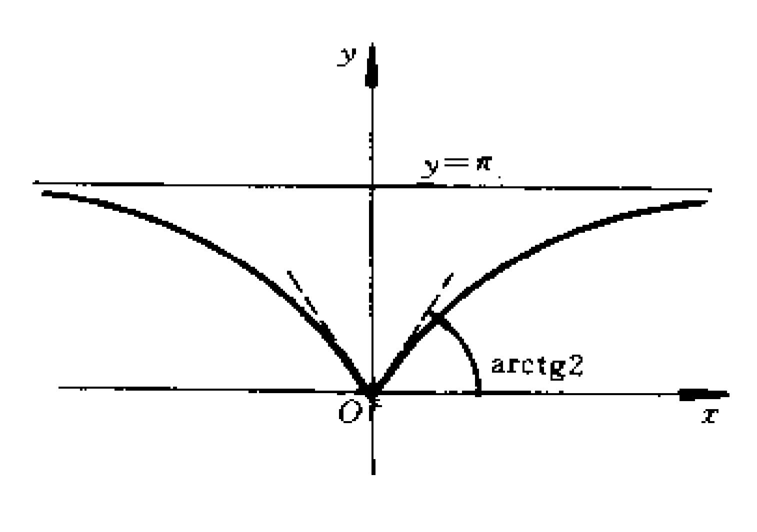


图 2.109

1521. $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

解 零点处：$x=-2$.

不连续点：$x=0$.

渐近线：$y=x+3$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[3+x+o\left(\frac{1}{x}\right)-x\right]=3.$$

$$y'=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right).$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 2$ 或 -1.

当 $0 < x < 2$ 时，$y' < 0$，图形下降，

当 $-1 < x < 0$ 时，$y' < 0$，图形下降，

当 $x < -1$ 及 $x > 2$ 时，$y' > 0$，图形上升；

故当 $x = -1$ 时有极大值 $y = \frac{1}{e} \approx 0.37$.

当 $x = 2$ 时有极小值 $y = 4\sqrt{e} \approx 6.59$.

$$y'' = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5x+2}{x^4}\right).$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = -\frac{2}{5}$，

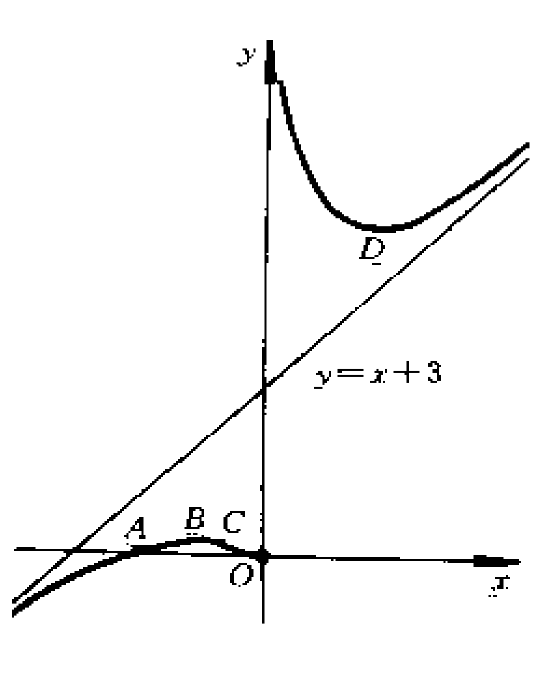


图 2.110

当 $x < -\frac{2}{5}$ 时，$y'' < 0$，图形是凸的，

当 $x > -\frac{2}{5}$ $(x \neq 0)$ 时，$y'' > 0$，图形是凹的，

故该点是拐点，此时 $y = \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}} \approx 0.13$.

又 $\lim\limits_{x \to 0-} y = 0$，$\lim\limits_{x \to 0+} y = +\infty$.

图形如图 2.110 所示．图中各点的位置：

$A(-2,0)$，$B(-1,0.37)$，

$C(-0.40,0.13)$，$D(2,6.59)$.

1522. $y = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

解 存在域：$|x| \geqslant 1$. 图形关于 Oy 轴对称.

渐近线：$y = 1$. 事实上,

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}] = 1.$$

当 $x = \pm 1$ 时有边界的极大值 $y = 2^{\sqrt{2}} \approx 2.67$.

$$y'_{+}(1) = -\infty,$$

$$y'_{-}(-1) = +\infty;$$

$$y'(x) = 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} \cdot \ln 2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right),$$

故当 $x < -1$ 时，$y' > 0$，曲线上升；

$x > 1$ 时，$y' < 0$，曲线下降.

$$y''(x) = (\ln 2)^2 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right)^2$$

$$+ \ln 2 \cdot 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$$

$$\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \right) > 0,$$ 故图形呈凹状.

图形如图 2.111 所示.

1523. $y = \ln \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$.

解 存在域：$x < 1$ 及 $x > 2$.

与坐标轴的交点：$(0, \ln 2)$ 及 $\left(\frac{1}{3}, 0 \right)$.

渐近线：$y = 0$；事实上,

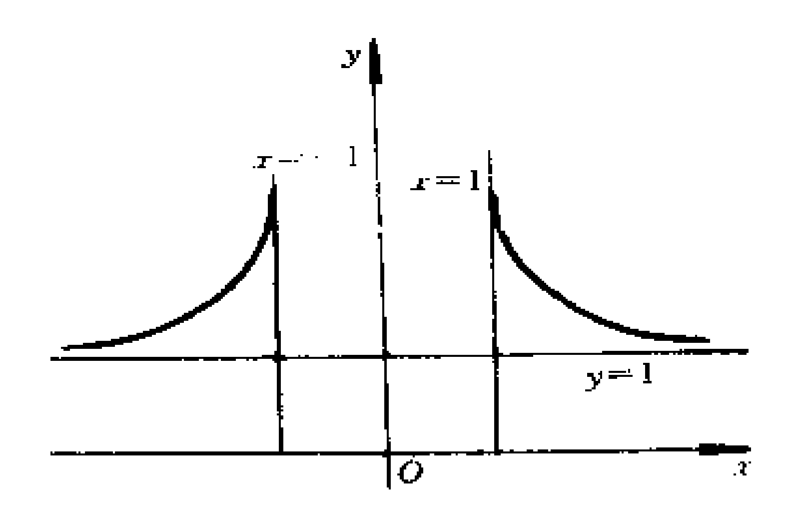


图 2.111

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}}{x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}=0.$$

$y'=\dfrac{3x^2-2x-3}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}$，令 $y'=0$ 得 $x=\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}\approx-0.72$（另一根不在存在域内），经判别知当 $x\approx-0.72$ 时有极大值 $y\approx1.12$.

$y''=\dfrac{-6x^5+15x^4-30x^2+30x-13}{(x-1)^2(x-2)^2(x^2+1)^2}$，令 $y''=0$ 得 $x\approx-1.52$. 判别知为拐点，此时 $y\approx0.99$.

当 $x<-1.49$ 时，$y''>0$，图形是凹的.

当 $x>2$ 时，$y''<0$，图形是凸的.

当 $x\to1-0$ 及 $x\to2+0$ 时，$y\to-\infty$.

图形如图 2.112 所示.

图中主要点的坐标：$A(-1.52,0.99)$，$B(-0.72,1.12)$，$C(0,\ln2)$，$D\left(\dfrac{1}{3},0\right)$.

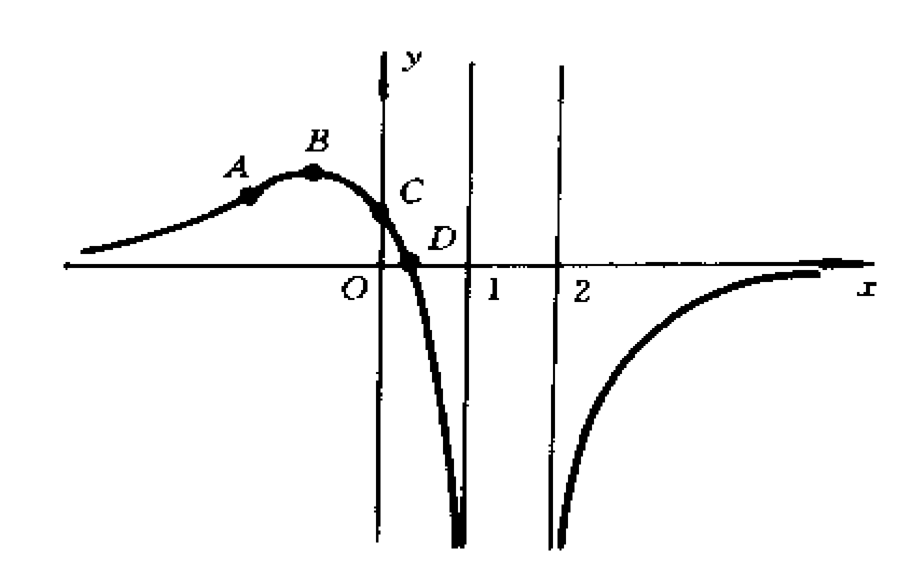


图 2.112

1524. $y = a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}\ (a > 0)$

解 存在域：$|x| \leqslant a$.

与坐标轴交点：$(0, -a)$ 及 $(0.67a, 0)$.

当 $x = -a$ 时有边界的极小值 $y = -\frac{\pi}{2}a$.

当 $x = a$ 时有边界的极大值 $y = \frac{\pi}{2}a$.

$y' = \frac{a + x}{\sqrt{a^2 - x^2}} > 0$(当 $|x| < a$ 时)，故图形单调上升．又

$y'_-(a) = +\infty, y'_+(-a) = 0.$

$y'' = \frac{a(a + x)}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0(|x| < a)$，

故图形是凹的．

图形如图 2.113 所示．

图中主要点的坐标：

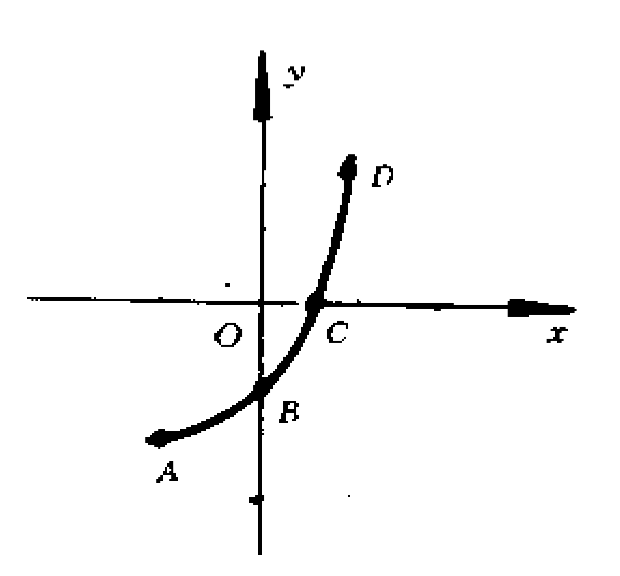


图 2.113

$A\left(-a, -\frac{\pi}{2}a\right)$,

$B(0, -a)$,

$C(0.67a, 0)$,

$D\left(a, \frac{\pi}{2}a\right)$.

1525. $y = \arccos \frac{1-x}{1-2x}$.

解 存在域：$\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| \leqslant 1$，两端平方之，解得

$x \leqslant 0$ 或 $x \geqslant \frac{2}{3}$.

渐近线：$y = \frac{\pi}{3}$. 事实上，

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\arccos \frac{1-x}{1-2x}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \arccos \frac{1-x}{1-2x} = \frac{\pi}{3}.$$

当 $x = 0$ 时有边界的极小值 $y = 0$，

当 $x = \frac{2}{3}$ 时有边界的极大值 $y = \pi$.

$$y' = -\frac{\operatorname{sgn}(1-2x)}{(1-2x)\sqrt{3x^2-2x}},$$

$$y''=\begin{cases}\dfrac{1}{(3x^2-2x)^{\frac{3}{2}}\cdot(1-2x)^2}\cdot(9x-12x^2-1), & \text{当 } x\leqslant 0 \text{ 时;}\\[2ex] \dfrac{1}{(3x^2-2x)^{\frac{3}{2}}\cdot(1-2x)^2}(12x^2-9x+1), & \text{当 } x\geqslant\dfrac{2}{3} \text{ 时.}\end{cases}$$

当 $x\leqslant 0$ 时，$y''<0$，图形是凸的；

当 $x\geqslant\frac{2}{3}$ 时，$y''>0$，图形是凹的．

又当 $x<0$ 时，$y'<0$，图形下降；

图 2.114

当 $x>\frac{2}{3}$ 时，$y'<0$，图形也下降；

$y'_-(0)=-\infty$，$y'_+\left(\frac{2}{3}\right)=-\infty$.

图形如图 2.114 所示．

1526. $y=x^x$.

解　一般只讨论 $x>0$. 函数值始终为正的，故图形在

Ox 轴的上方.

$$y' = x^x(1 + \ln x).$$

令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{e} \approx 0.368$. 经判别知此时有极小值

$$y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \approx 0.692.$$

$$y'' = x^x\left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x}\right] > 0,\text{图形是凹的}.$$

当 $x = +0$ 时有边界值 $y = 1$(利用洛比塔法则求得).

图形如图 2.115 所示.

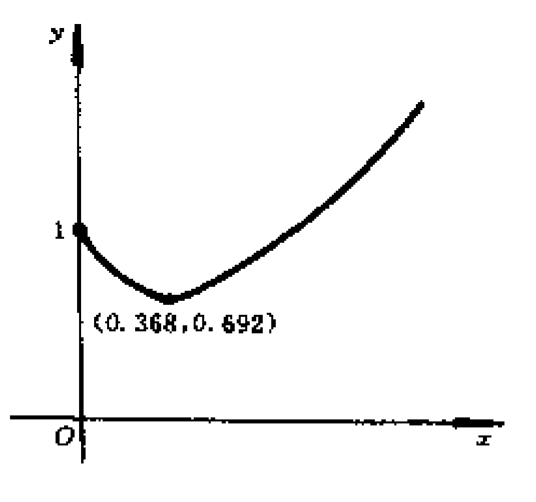


图 2.115

1527. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

解 一般只讨论 $x > 0$.

渐近线:$y = 1$. 事实上,

$$k = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}-1} = 0,\ b = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

当 $x = +0$ 时有边界的最小值 $y = 0$.

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x).\ \text{令 } y' = 0 \text{ 得 } x = e.$$

当 $x < e$ 时,$y' > 0$,图形上升,

当 $x > e$ 时,$y' < 0$,图形下降.

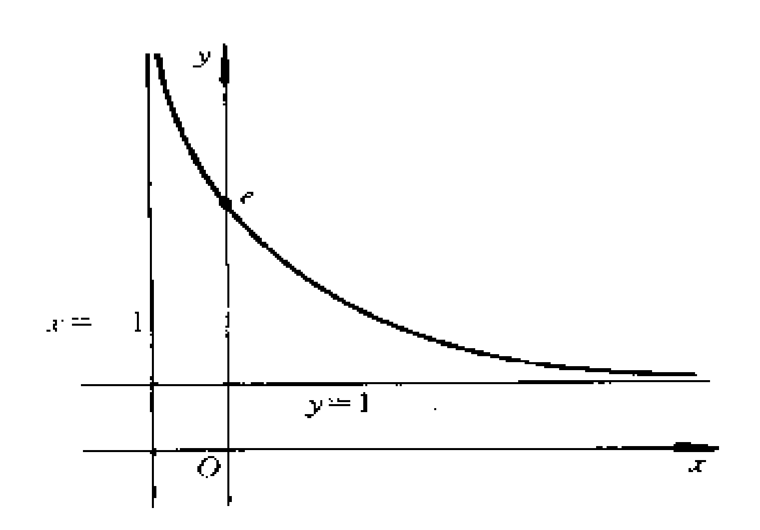


图 2.117

图形如图 2.117 所示.

1529. $y = x\left(1+\frac{1}{x}\right)\ (x>0)$.

解 $$y' = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x + x\left(1+\frac{1}{x}\right)\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right] > 0,$$

易证 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0 (x>0)$,故 $y'>0$,从而图形上升.

当 $x\to +0$ 时,有边界的最小值 $y=0$.

渐近线:$y = e\left(x-\frac{1}{2}\right)$. 事实上,

$$k = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}-e}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]}{-\frac{1}{x^{2}}}$$

$$=-e\lim_{x\to+\infty}x^{2}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^{2}}\right.$$

$$\left.+O\left(\frac{1}{x^{2}}\right)-\frac{1}{x+1}\right]=-\frac{e}{2}.$$

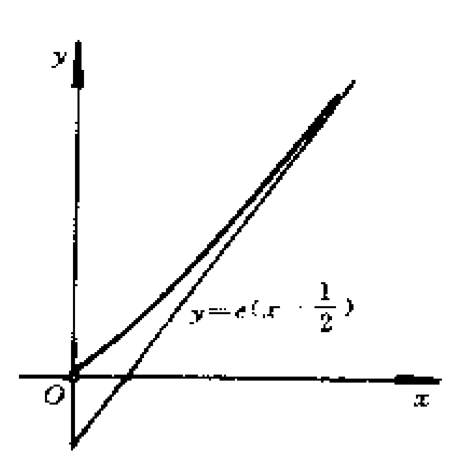


图 2.118

图形如图 2.118 所示.

1530. $y=\dfrac{e^{\frac{1}{1-x^{2}}}}{1+x^{2}}$(不研究凸凹性).

解 函数值始终为正的,故图形在 Ox 轴的上方. 图形关于 Oy 轴对称.

不连续点:$x=1$ 及 $x=-1$.

$$y'=\frac{2x^{3}e^{\frac{1}{1-x^{2}}}(3-x^{2})}{(1-x^{2})^{2}(1+x^{2})^{2}},$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 $x=\pm\sqrt{3}$.

经判别:

当 $x=0$ 时有极小值 $y=e$;

当 $x=-\sqrt{3}$ 时有极大值 $y=\dfrac{1}{4\sqrt{e}}\approx0.15$;

当 $x=\sqrt{3}$ 时有极大值 $y=\frac{1}{4\sqrt{e}}\approx 0.15$.

渐近线：$y=0$；$x=-1$ 及 $x=1$；

图形如图 2.119 所示．图中主要点的坐标：

$$A(0,e),B(\sqrt{3},0.15),C(-\sqrt{3},0.15).$$

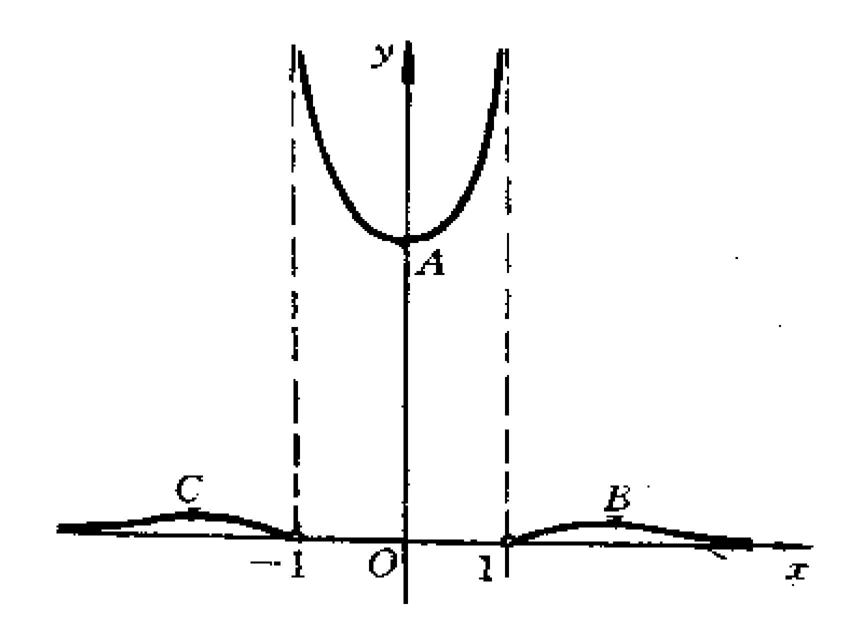


图 2.119

作出下列参数方程所表示的曲线：

1531. $x=\frac{(t+1)^2}{4},y=\frac{(t-1)^2}{4}$.

解 先把此参数方程化成直角坐标系下的方程．

$$\sqrt{x}=\frac{|t+1|}{2},\sqrt{y}=\frac{|t-1|}{2}.$$

当 $t\geqslant 1$ 时，$\sqrt{x}=\frac{t+1}{2}$，$\sqrt{y}=\frac{t-1}{2}$. 相减得

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=1(x\geqslant 1,x>y); \tag{1}$$

当 $t \leqslant -1$ 时，$\sqrt{x} = \frac{-t-1}{2}$，$\sqrt{y} = \frac{1-t}{2}$. 因而

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = 1 (y \geqslant 1, y > x); \tag{2}$$

当 $-1 \leqslant t \leqslant 1$ 时，$\sqrt{x} = \frac{t+1}{2}$，$\sqrt{y} = \frac{1-t}{2}$，相加得

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 (0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1). \tag{3}$$

由方程(1)，(2)及(3)即得所给曲线的图形. 图形关于 $y = x$ 对称，如图 2.120 所示.

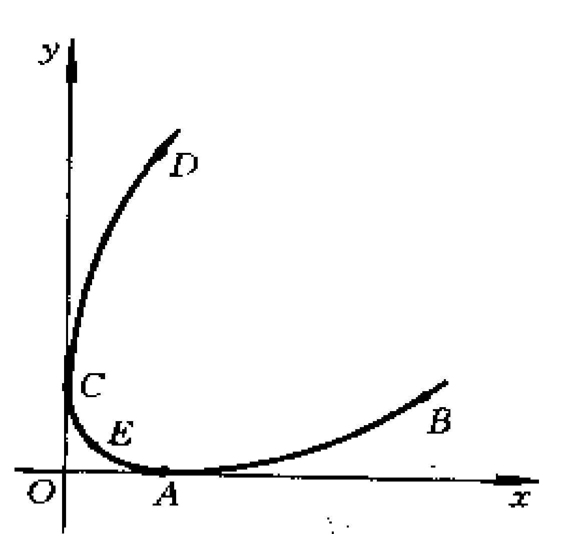


图 2.120

图中主要点的坐标：$A(1,0)$，$B(4,1)$，$C(0,1)$，$D(1,4)$，$E\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

1532. $x = 2t - t^2$，$y = 3t - t^3$.

解 $x'_t = 2(1-t)$，$y'_t = 3(1-t^2)$. 令 $x'_t = 0$，$y'_t = 0$，得 $t = \pm 1$.

作下表：

t的区间	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty,-1)$	+	−	由 $-\infty$ 上升到 -3	由 $+\infty$ 下降到 -2
$(-1,1)$	+	+	由 -3 上升到 1	由 -2 上升到 2
$(1,+\infty)$	−	−	由 1 下降到 $-\infty$	由 2 下降到 $-\infty$

$\frac{dy}{dx}=\frac{3(1-t^2)}{2(1-t)}=\frac{3}{2}(1+t)\quad(t\neq 1)$. 令$\frac{dy}{dx}=0$得

$t=-1$，此时 $x=-3$，$y=-2$.

由于 $t=1\pm\sqrt{1-x}$，故存在域为 $x\leqslant 1$，且图形有两支，又因 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1-t)}$，故当 $t>1$ 时图形呈凸状，而当 $t<1$ 时图形呈凹状.

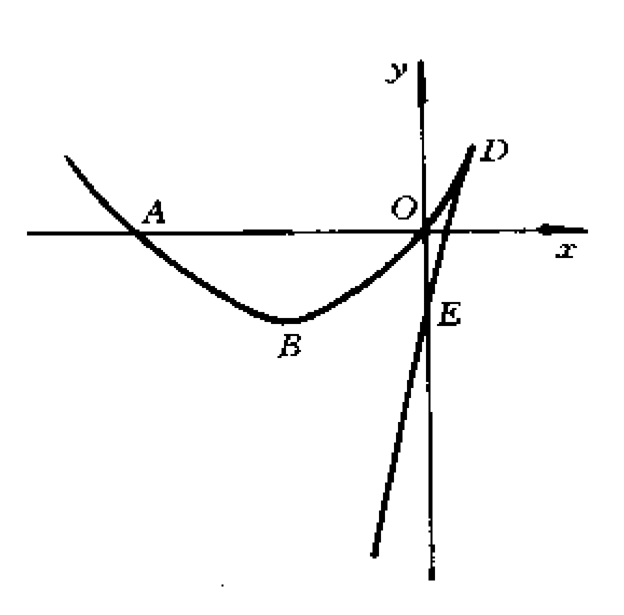


图 2.121

当 $x=0$ 时，$t=0$ 或 $t=2$，此时 $y=0$ 或 $y=-2$.

当 $y=0$ 时，$t=0$，$+\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$，此时 $x=0$，0.464 或 -6.464.

图形如图 2.121 所示．图中主要点的坐标：

$$A(-6.464,0),B(-3,-2),D(1,2),E(0,-2).$$

1533. $x=\frac{t^2}{t-1}, y=\frac{t}{t^2-1}$.

解 $x'_t=\frac{t(t-2)}{(t-1)^2}, y'_t=-\frac{1+t^2}{(t^2-1)^2}$. 考虑 $x'_t=0$, $y'_t=0$ 及 x'_t, y'_t 趋于 ∞ 的 t 值：$t=0$, ± 1 及 2.

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty,-1)$	$+$	$-$	由 $-\infty$ 上升到 $-\frac{1}{2}$	由 0 下降到 $-\infty$
$(-1,0)$	$+$	$-$	由 $-\frac{1}{2}$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0
$(0,1)$	$-$	$-$	由 0 下降到 $-\infty$	由 0 下降到 $-\infty$
$(1,2)$	$-$	$-$	由 $+\infty$ 下降到 4	由 $+\infty$ 下降到 $\frac{2}{3}$
$(2,+\infty)$	$+$	$-$	由 4 上升到 $+\infty$	由 $\frac{2}{3}$ 下降到 0

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1+t^2}{t(t-2)(t+1)^2},$$

当 $x\in(-\infty,0)$ 及 $(4,+\infty)$ 时，$\frac{dy}{dx}<0$，因而曲线下降．

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2(t-1)^3(t^4+3t^2+4t+1)}{t^3(t-2)^3(t+1)^4}$$，令$\frac{d^2y}{dx^2}=0$得$t\approx-0.33$，经判别此时对应于拐点$(-0.08,0.30)$.

令$\frac{dx}{dy}=0$得$t=0,2$及-1，其中当$t=0$及2时有垂直切线，切点为$(0,0)$及$\left(4,\frac{2}{3}\right)$. 当$t=-1$时，$x=-\frac{1}{2}$，此为垂直渐近线. 事实上，

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}y=\lim_{t\to-1}\frac{t}{t^2-1}=\infty.$$

斜渐近线为$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to1}\frac{1}{t(t+1)}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y-\frac{x}{2}\right)=-\lim_{t\to1}\frac{t(t+2)}{2(t+1)}=-\frac{3}{4}.$$

又当$x\to+\infty$，即当$t\to1+0$时，$y\to+\infty$或当$t\to+\infty$时，$y\to0$；

又当$x\to-\infty$时，即当$t\to-\infty$时，$y\to0$或当$t\to1-0$时，$y\to-\infty$.

总之，$\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$或0，$\lim\limits_{x\to-\infty}y=0$或$-\infty$. 图形如图2.122所示. 图中主要点的坐标：

$A\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$，$B\left(4,\frac{2}{3}\right)$.

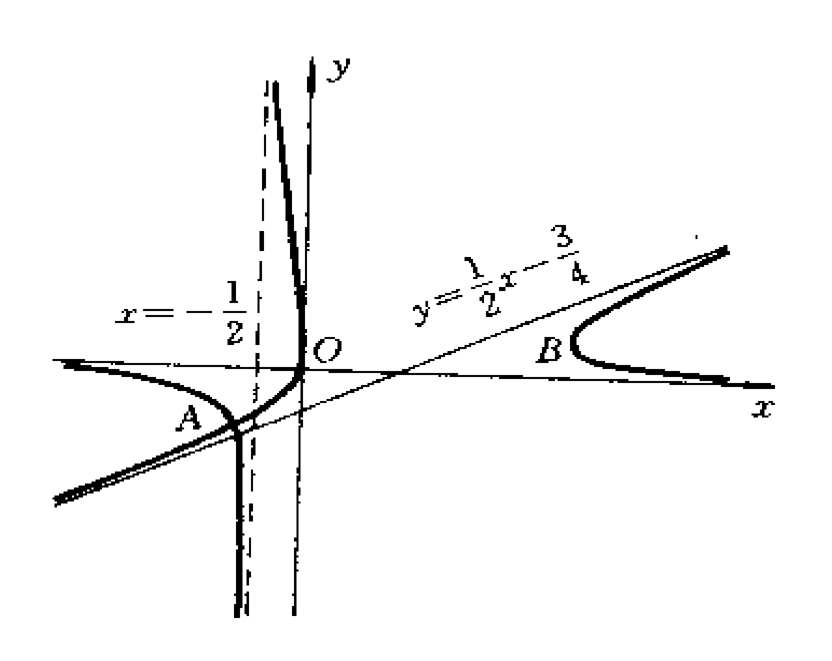


图 2.122

1534. $x=\frac{t^2}{1-t^2}, y=\frac{1}{1+t^2}$.

解 由于以 $-t$ 换 t, x 及 y 值不变，故只须考虑 t 的正值. 又因 $t^2=\frac{x}{1+x}$，故 $x\geqslant 0$ 或 $x\leqslant -1$.

$$x_t'=\frac{2t}{(1-t^2)^2}, y_t'=\frac{-2t}{(1+t^2)^2},$$

$$\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2<0，曲线下降.$$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3}$，当 $|t|<1$ 时图形呈凹状，当 $|t|>1$ 时图形呈凸状.

考虑 $x_t'=0, y_t'=0$ 及 x_t'，y_t' 趋于 ∞ 的 t 值：

$t=0, t=1$.

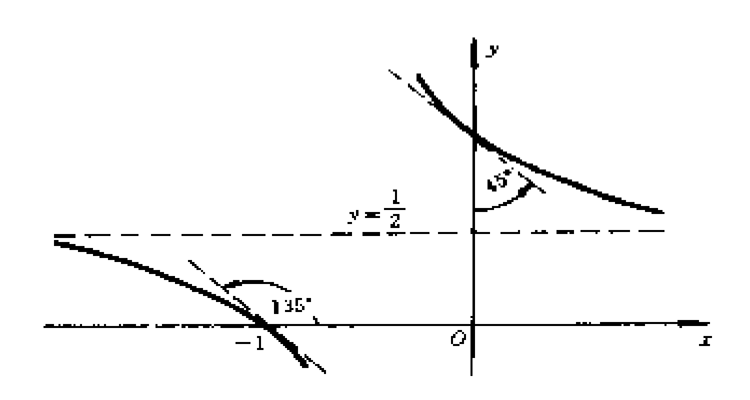


图 2.123

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(0,1)$	+	−	由 0 上升到 $+\infty$	由 1 下降到 $\frac{1}{2}$
$(1,+\infty)$	+	−	由 $-\infty$ 上升到 -1	由 $\frac{1}{2}$ 下降到 0

渐近线为 $y=\frac{1}{2}$. 事实上

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to+1}\frac{1-t^2}{t^2(1+t^2)}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{t\to\pm1}\frac{1}{1+t^2}=\frac{1}{2}.$$

在点$(-1,0)$处$(t=+\infty)$，$\frac{dy}{dx}=-1$；而在点$(0,1)$处$(t=0)$仍有$\frac{dy}{dx}=-1$. 这说明在这两点处的切线均与 Ox 轴成 135° 的角. 这两点且为边界极值点.

图形如图 2.123 所示.

解 由于 $a\cos2(t+2\pi)=a\cos2t$ 及 $a\cos3(t+2\pi)=a\cos3t$. 因此，我们只须考虑 t 在 $(0,2\pi)$ 内变化时，x 及 y 的变化情况．

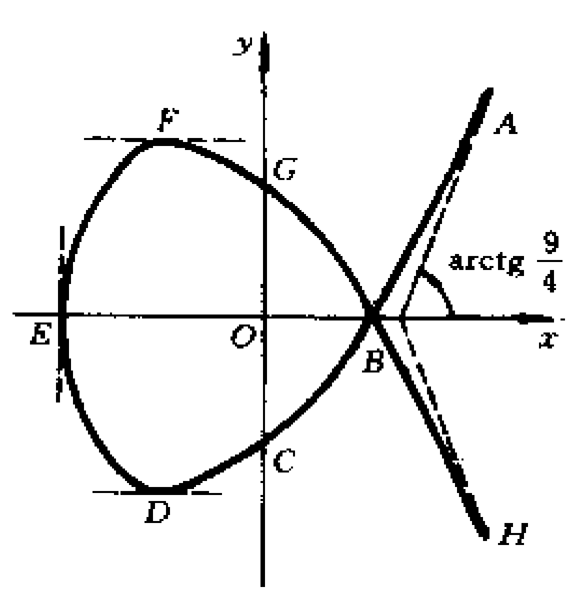


图 2.125

$$x_t'=-2a\sin2t,$$

$$y_t'=-3a\sin3t,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3\sin3t}{2\sin2t}.$$

考虑 $x_t'=0, y_t'=0$ 的值：

$t=0,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3}$ 及 2π.

作下表：

t 的范围	x_t'	y_t'	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$	$-$	$-$	由 a 下降到 $-\frac{a}{2}$	由 a 下降到 $-a$	$+$	上升
$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$	$-$	$+$	由 $-\frac{a}{2}$ 下降到 $-a$	由 $-a$ 上升到 0	$-$	下降
$\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$	$+$	$+$	由 $-a$ 上升到 $-\frac{a}{2}$	由 0 上升到 a	$+$	上升
$\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$	$+$	$-$	由 $-\frac{a}{2}$ 上升到 a	由 0 下降到 $-a$	$-$	下降
$\left(\pi,\frac{4\pi}{3}\right)$	$-$	$+$	由 a 下降到 $-\frac{a}{2}$	由 $-a$ 上升到 a	$-$	下降

（续表）

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$\left(\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right)$	$-$	$-$	由 $-\frac{a}{2}$ 下降到 $-a$	由 a 下降到 0	$+$	上升
$\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3}\right)$	$+$	$-$	由 $-a$ 上升到 $-\frac{a}{2}$	由 0 下降到 $-a$	$-$	下降
$\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$	$+$	$+$	由 $-\frac{a}{2}$ 上升到 a	由 $-a$ 上升到 a	$+$	上升

当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时，$\frac{dy}{dx}=0$，此时 $x=-\frac{a}{2}$，$y=-a$；

当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{dy}{dx}=\infty$（t 从小于 $\frac{\pi}{2}$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{dy}{dx}=-\infty$；从大于 $\frac{\pi}{2}$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{dy}{dx}=+\infty$），此时 $x=-a$，$y=0$；

当 $t=\frac{2\pi}{3}$ 时，$\frac{dy}{dx}=0$，此时 $x=-\frac{a}{2}$，$y=a$；

当 $t=\pi$ 时，利用洛比塔法则可求得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{9}{4}$，此时 $x=a$，$y=-a$；

当 $t=0$ 时，利用洛比塔法则可求得 $\frac{dy}{dx}=\frac{9}{4}$，此时 $x=y=a$.

图形如图 2.125 所示．图中主要点的坐标：

$$A(a,a),B\left(\frac{a}{2},0\right),C\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right),$$

$$D\left(-\frac{a}{2},-a\right),E(-a,0),F\left(-\frac{a}{2},a\right),$$

$G\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$，$H(a,\quad a)$.

1537. $x=\cos^4 t, y=\sin^4 t$.

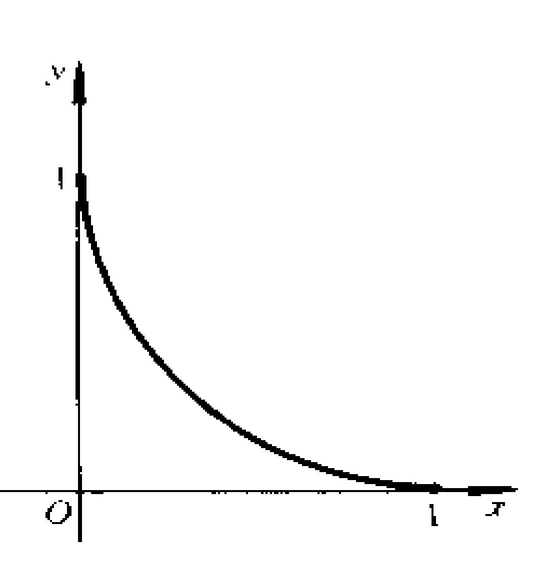
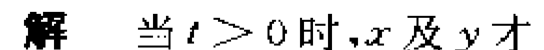


图 2.126

解 $\sqrt{x}=\cos^2 t$，$\sqrt{y}=\sin^2 t$，相加即得 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$. 图形如图 2.126 所示*).

*）参看 1531 题.

1538. $x=t\ln t$, $y=\frac{\ln t}{t}$.



解 当 $t>0$ 时，x 及 y 才有意义.

当 $0<t\leqslant 1$ 时，令 $t'=\frac{1}{t}$，则 $t'\geqslant 1$，且 $x=-\frac{\ln t'}{t'}$，$y=-t'\ln t'$，所以，图形关于直线 $x+y=0$ 对称.

以下讨论图形的极值点，凹凸性及拐点，不妨设 $t\geqslant 1$：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\ln t}{t^2(1+\ln t)},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2\ln^2 t-4}{t^3(1+\ln t)^2}.$$

令 $1-\ln t=0$，得 $t=e$. 经判别此时图形有极大值点：$A\left(e,\frac{1}{e}\right)$.

令 $\ln^2 t-2=0$，得 $t=e^{\sqrt{2}}$，相应的点

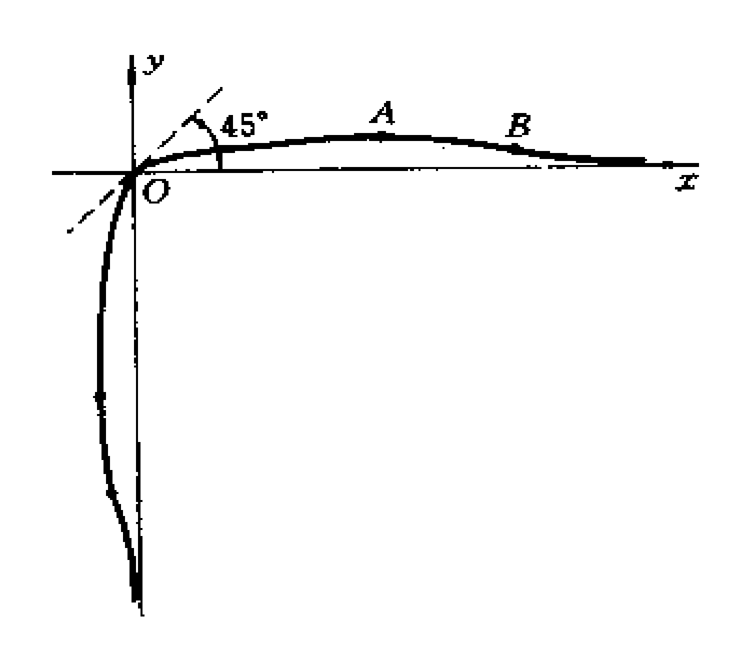


图 2.127

$B\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}},\dfrac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$为图形的拐点．

当$1\leqslant t\leqslant e^{\sqrt{2}}$，即当$0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$时，图形呈凸状．当$t\geqslant e^{\sqrt{2}}$，即当$x\geqslant\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$时，图形呈凹状．

作下表：

t的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\dfrac{dy}{dx}$	图形
$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$	$-$	$+$	由0下降到$-\dfrac{1}{e}$	由$-\infty$上升到$-e$	$-$	下降
$\left(\dfrac{1}{e},e\right)$	$+$	$+$	由$-\dfrac{1}{e}$上升到e	由$-e$上升到$\dfrac{1}{e}$	$+$	上升
$(e,+\infty)$	$+$	$-$	由e上升到$+\infty$	由$\dfrac{1}{e}$下降到0	$-$	下降

曲线通过点(0,0),在此点切线的倾角为45°.

水平渐近线为 $y=0$. 事实上,

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t}}{1}=0.$$

垂直渐近线为 $x=0$. 事实上,

$$\lim_{x\to0}y=\lim_{t\to+0}y=\lim_{t\to+0}\frac{\ln t}{t}=-\infty.$$

图形如图2.127所示.

1539. $x=\dfrac{a}{\cos^3 t}, y=a\operatorname{tg}^3 t\ (a>0)$.

解 将此参数方程化为直角坐标系下的方程:

$$x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

显然,$|x|\geqslant a$. 且图形对于两坐标轴都对称,故只须考虑在第一象限部分的函数图形. 由于

$$y'=x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}, y''=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left(y^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}\right).$$

而当 $x>0, y>0$ 时,有 $x>y$. 从而有

$$y'>0, y''>0,$$

故图形上升且呈凹状.

在 $(a,0)$ 点的切线的倾角为0°. 图形如图2.128所示.

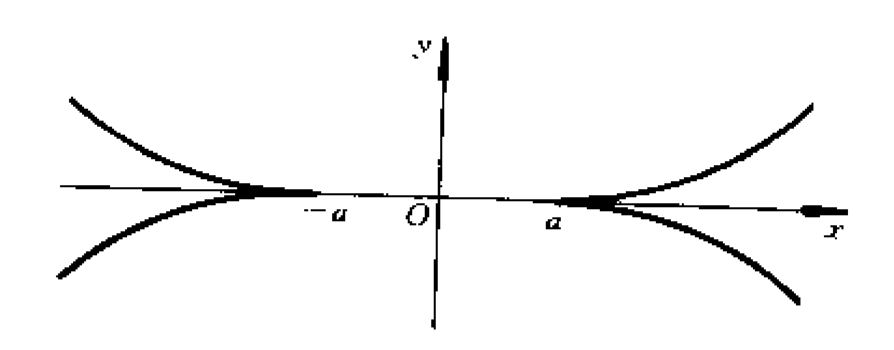


图 2.128

1540. $x = a(\operatorname{sh}t - t), y = a(\operatorname{ch}t - 1)\ (a > 0).$

解　当 t 用 $-t$ 换时，x 的大小不变符号相反，而 y 却不变，故图形对于 Oy 轴对称．

$$x'_t = a(\operatorname{ch}t - 1),\ y'_t = a\operatorname{sh}t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t + 1}{e^t - 1}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4e^{2t}}{a(e^t - 1)^4}.$$

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	图形
$(-\infty, 0)$	+	−	由 $-\infty$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0	−	−	下降
$(0, +\infty)$	+	+	由 0 上升到 $+\infty$	由 0 上升到 $+\infty$	+	−	上升

当 $t \to -0$ 时，$x \to -0, \frac{dy}{dx} \to -\infty$；

当 $t \to +0$ 时，$x \to +0, \frac{dy}{dx} \to +\infty$. 因此在 $(0,0)$ 点的切

线垂直于 Ox 轴．

图形如图 2.129 所示．

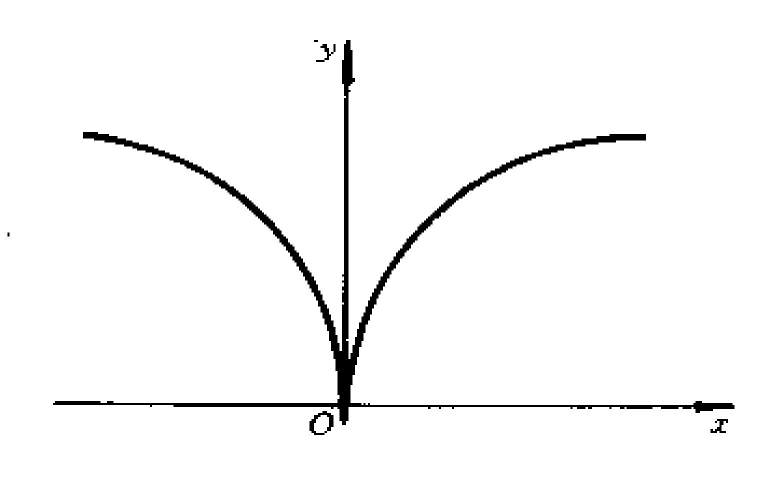


图 2.129

把下列曲线方程变成参数式，然后作出这些曲线：

1541. $x^3+y^3-3axy=0(a>0)$.

解 设 $y=tx$，代入方程，并消去 x^2，即得

$$x=\frac{3at}{1+t^3},y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

由于

$$x'_t=\frac{6a\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}{(1+t^3)^2},y'_t=\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

考虑 $x'_t=0,y'_t=0$ 及 x'_t,y'_t 趋于无穷的 t 值：

$$t=-1,0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\text{ 及 }\sqrt[3]{2}.$$

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty,-1)$	$+$	$-$	由 0 上升到 $+\infty$	由 0 下降到 $-\infty$
$(-1,0)$	$+$	$-$	由 $-\infty$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0
$\left(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$+$	$+$	由 0 上升到 $\sqrt[3]{4a}$	由 0 上升到 $\sqrt[3]{2a}$
$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\sqrt[3]{2}\right)$	$-$	$+$	由 $\sqrt[3]{4a}$ 下降到 $\sqrt[3]{2a}$	由 $\sqrt[3]{2a}$ 上升到 $\sqrt[3]{4a}$
$(\sqrt[3]{2},+\infty)$	$-$	$-$	由 $\sqrt[3]{2a}$ 下降到 0	由 $\sqrt[3]{4a}$ 下降到 0

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)},$$

当 $t=0$ 时，$x=0,y=0,\frac{dy}{dx}=0$；当 $t\to+\infty$ 时，

$x=0,y=0,\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t(2-t^3)}{2(\frac{1}{2}-t^3)}=\infty$. 这说明，

坐标原点是曲线的二重点．曲线的一支与 Ox 轴相切，一支与 Oy 轴相切．

渐近线：$x+y+a=0$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2+3at}{1+t^3}=\lim_{t\to-1}\frac{6at+3a}{3t^2}$$

$$=-a.$$

图形如图 2.130 所示．图中主要点的坐标：

$A\left(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2}\right)$,

$B\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$,

$C\left(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4}\right)$.

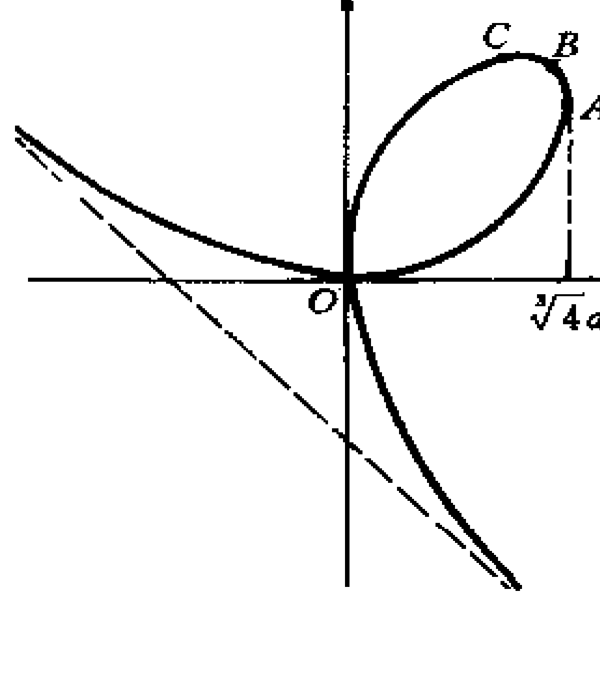


图 2.130

1542. $x^2+y^2=x^4+y^4$.

解 显见曲线关于两坐标轴对称，同时关于直线 $y=x$ 对称.

设 $x=ty$，则当 $y\neq 0$ 时，得

$$y=\pm\sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}}.$$

根据对称性，不妨限于考察方程

$$\begin{cases} x=t\sqrt{\dfrac{t^2+1}{t^4+1}}, \\ y=\sqrt{\dfrac{t^2+1}{t^4+1}}. \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

由于 $0\leqslant x\leqslant 1, x\leqslant y$，故曲线界于纵轴正半轴与直线 $y=x$ 之间，由此根据对称性即可作出全部图形. 当 t 由0连续变到1时，曲线上的点(0,1)连续变化到点

t	0	0.2	0.4	0.6	$\sqrt{\sqrt{2}-1}$	0.8	0.9	1
x	0	0.20	0.42	0.65	0.71	0.86	0.94	1
y	1	1.02	1.06	1.09	1.10	1.08	1.04	1

曲线与两坐标轴的交点为$(-1,0)$，$(1,0)$，$(0,1)$及$(0,-1)$，如图2.131所示.

图 2.131

1543. $x^2y^2=x^3-y^3$.

解 设$y=tx$，代入原方程，即得

$$x=\frac{1-t^3}{t^2},$$

$$y=\frac{1-t^3}{t}\ (t\neq 0).$$

$$x'_t=-\frac{2+t^3}{t^3},\ y'_t=-\frac{1+2t^3}{t^2}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t(1+2t^3)}{2+t^3}.$$

令$x'_t=0$，$y'_t=0$及x'_t，y'_t趋于∞，得

$$t=-\sqrt[3]{2},\ -\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ 0.$$

作下表：

t的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$(-\infty,-\sqrt[3]{2})$	$-$	$+$	由$+\infty$下降到$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	由$-\infty$上升到$-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	$-$	下降
$\left(-\sqrt[3]{2},-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$+$	$+$	由$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$上升到$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	由$-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$上升到$-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	$+$	上升
$\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},0\right)$	$+$	$-$	由$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$上升到$+\infty$	由$-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$下降到$-\infty$	$-$	下降
$(0,+\infty)$	$-$	$-$	由$+\infty$下降到$-\infty$	由$+\infty$下降到$-\infty$	$+$	上升

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\sqrt[3]{2}}=\infty,\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=0,$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=1.$$

图形通过点 $A\left(\frac{3}{\sqrt[3]{4}},-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)$，$B\left(\frac{3}{\sqrt[3]{2}},-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$，及 $O(0,0)$. 如图 2.132 所示.

1544. $x^y=y^x(x>0,y>0)$.

解 由方程显见直线 $y=x$ 是图形的一部分. 对于 $y\neq x$ 的部分,图形显然关于直线 $y=x$ 对称.

设 $x=(1+t)^{\frac{1}{t}}$,则 $y=(1+t)^{1+\frac{1}{t}}$,即当 $x\neq y$ 时,曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=(1+t)^{\frac{1}{t}},\\ y=(1+t)^{1+\frac{1}{t}}.\end{cases}$$

由条件 $x>0,y>0$ 知,t 满足 $-1<t<+\infty$,由于

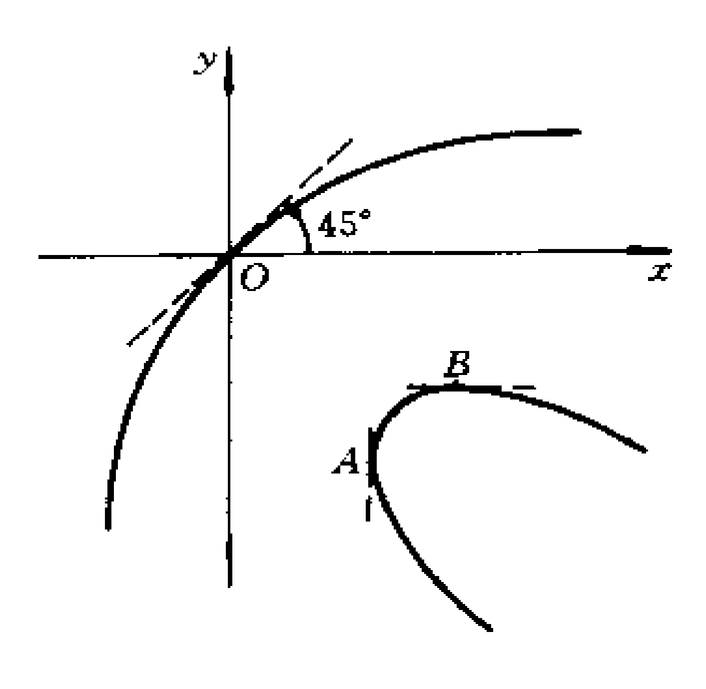


图 2.132

$$\lim_{t\to-1+0} x = \lim_{t\to-1+0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = +\infty,$$

$$\lim_{t\to-1+0} y = \lim_{t\to-1+0} (1+t)^{1+\frac{1}{t}} = 1;$$

$$\lim_{t\to+\infty} x = 1, \lim_{t\to+\infty} y = +\infty,$$

故直线 $x=1$ 和 $y=1$ 是曲线的渐近线．又因

$$\lim_{t\to 0} x = \lim_{t\to 0} y = e,$$

故点(e,e)是曲线上的二重点．由于

$$\frac{dy}{dt} = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}\left[\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\right],$$

$$\frac{dx}{dt} = (1+t)^{\frac{1}{t}}\left[\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}\right],$$

于是，

$$\frac{dy}{dx} = (1+t)\left[1+\frac{t^2}{t-(1+t)\ln(1+t)}\right].$$

容易证明：

$$\lim_{t\to 0}\frac{dy}{dx}=-1,$$

并且当$t\in(0,+\infty)$,从而$x\in(1,e)$时,恒有$\frac{dy}{dx}<0$.

事实上,设

$$g(t)=t^2-[(1+t)\ln(1+t)-t],$$

则$g(0)=0$,并且容易证明

$$g'(t)=2t-\ln(1+t)>0,$$

$$(1+t)\ln(1+t)-t>0.$$

从而,有

$$g(t)=t^2-[(1+t)\ln(1+t)-t]>0,$$

即

$$\frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t)-t}>1.$$

于是,

$$\frac{dy}{dx}=(1+t)\left[1-\frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t)-t}\right]<0.$$

由对称性知,对于$t\in(-1,0)$,也有$\frac{dy}{dx}<0$. 而当$t\to 0$时,有

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{dy}{dx}=-1,$$

所以,曲线始终是单调下降的,并呈凹状,无极值和拐点. 对应于t的变化范围0至1.

计算几点坐标如下:

t	0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-0.9	$t\to -1$
x	e	3.05	3.59	4.50	7.48	12.9	$x\to +\infty$
y	e	2.44	2.15	1.84	1.49	1.29	$y\to 1$

综上所述，曲线的图形由两部分组成，一部分是直线，另一部分是对称于直线 $y=x$ 的曲线(图 2.133)。

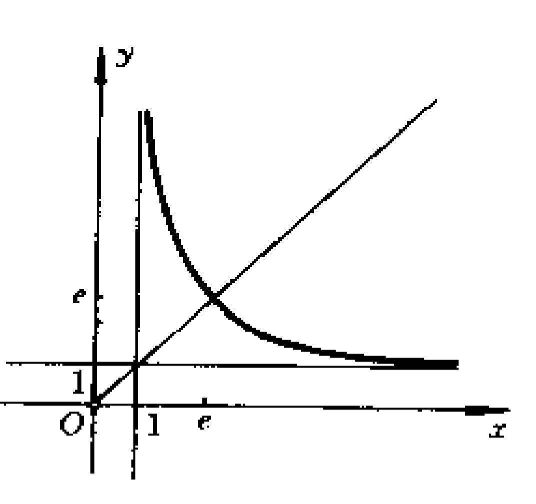


图 2.133

1545. 作出曲线 $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{ch}^2y=1$ 的图形．

解 显见曲线的图形关于两坐标轴是对称的，故只须在第一象限 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 范围内进行讨论．考虑渐近线：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1})}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}\left(\mathrm{ch}x+\frac{\mathrm{sh}x}{\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}\mathrm{ch}x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{ch}x}{\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\mathrm{sh}^2x+1}{\mathrm{sh}^2x-1}}=1.$$

为求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)$，令

$$u=y-x=\ln(\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1})-x.$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}e^u=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{ch}x+\dfrac{\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x}{\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{ch}x(\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1})}{e^x\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}=1,$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=0.$$

因此，直线 $y=x$ 是原曲线的渐近线.

因为当 $y=0$ 时 $\mathrm{ch}y$ 取最小值 $\mathrm{ch}y=1$，所以，x 必须满足

$$\mathrm{ch}^2x\geqslant 2 \text{ 或 } |x|\geqslant \ln(1+\sqrt{2})\approx 0.88,$$

并且当 $y=0$ 时，$|x|=\ln(1+\sqrt{2})$.

曲线方程也可表示成

$$(\mathrm{ch}x-\mathrm{ch}y)(\mathrm{ch}x+\mathrm{ch}y)=1,$$

从而令

$$\mathrm{ch}x-\mathrm{ch}y=t,$$

即

$$\mathrm{ch}x+\mathrm{ch}y=\frac{1}{t}.$$

所以，对于第一象限部分的曲线方程可表示为

$$\begin{cases}\mathrm{ch}x=\dfrac{t+\dfrac{1}{t}}{2},\\ \mathrm{ch}y=\dfrac{\dfrac{1}{t}-t}{2},\end{cases}(0<t\leqslant\sqrt{2}-1).$$

由原方程知

$$2\mathrm{ch}x\mathrm{sh}x-2\mathrm{ch}y\mathrm{sh}y\cdot y'=0$$

或

$$y'=\frac{\mathrm{ch}x\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}y\mathrm{sh}y}>0.$$

因而，曲线是单调上升的.

又由于

$$y''=\frac{(\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x)\mathrm{ch}y\mathrm{sh}y-(\mathrm{sh}^2y+\mathrm{ch}^2y)\cdot y'\cdot\mathrm{ch}x\mathrm{sh}x}{(\mathrm{ch}y\mathrm{sh}y)^2}$$

$$=\frac{(\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x)\mathrm{ch}^2y\mathrm{sh}^2y-(\mathrm{sh}^2y+\mathrm{ch}^2y)\mathrm{ch}^2x\mathrm{sh}^2x}{(\mathrm{ch}y\mathrm{sh}y)^3},$$

而

$$\begin{aligned}&(\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x)\mathrm{ch}^2y\mathrm{sh}^2y-(\mathrm{sh}^2y\\&\quad+\mathrm{ch}^2y)\mathrm{ch}^2x\mathrm{sh}^2x\\&=\mathrm{ch}^2x\mathrm{ch}^2y(\mathrm{sh}^2y-\mathrm{sh}^2x)+\mathrm{sh}^2x\mathrm{sh}^2y(\mathrm{ch}^2y-\mathrm{ch}^2x)\\&=\mathrm{ch}^2x\mathrm{ch}^2y(\mathrm{ch}^2y-\mathrm{ch}^2x)+\mathrm{sh}^2x\mathrm{sh}^2y(\mathrm{ch}^2y-\mathrm{ch}^2x)\\&=(\mathrm{ch}^2y-\mathrm{ch}^2x)(\mathrm{ch}^2x\mathrm{ch}^2y+\mathrm{sh}^2x\mathrm{sh}^2y)\\&=-(\mathrm{ch}^2x\mathrm{ch}^2y+\mathrm{sh}^2x\mathrm{sh}^2y)<0.\end{aligned}$$

于是，$y''<0$ 恒成立．所以，曲线呈凸状．

计算几点的坐标如下：

t	$\sqrt{2}-1$	0.4	0.3	0.2	0.1	$t\to0$
x	$\ln(1+\sqrt{2})$	0.92	1.07	1.61	2.31	$x\to+\infty$
y	0	0.33	0.98	1.53	2.28	$y\to+\infty$

曲线形状如图 2.134 所示．作出下列用极坐标(φ,r) $(r\geqslant0)$表示的函数的图形：

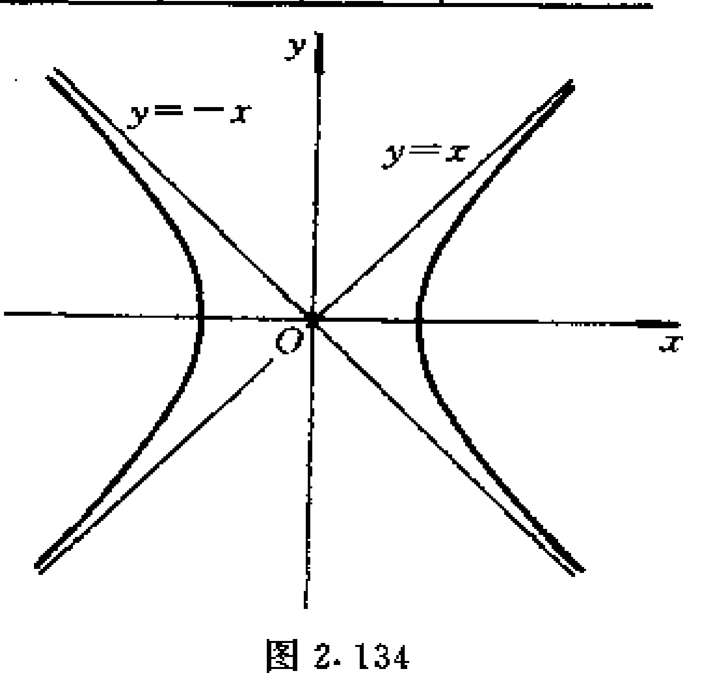


图 2.134

1546. $r=a+b\cos\varphi$ $(0<a\leqslant b)$.

解 当 $a=b$ 时，$r=a(1+\cos\varphi)$，这就是心脏线，如

图 2.135 所示.

当 $0<a<b$ 时,其几何轨迹叫做蚶线,由于 $r(-\varphi)=r(\varphi)$,故图形关于极轴对称.由于当 $r\geqslant 0$ 时,$|\varphi|\leqslant \alpha=\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$,故当 $\varphi=0$ 时 r 有极大值 $r=a+b$;当 $\varphi=\pm\alpha$ 时 r 有边界的极小值 $r=0$. 又由于 $r'=-b\sin\varphi<0$,故当 φ 由 0 变到 α 时,r 由 $a+b$ 变到 0.

当 $r<0$ 时,$\alpha<|\varphi|\leqslant\pi$,仿照上述讨论,$r$ 由 0 下降到 $a-b$.

极点 O 为二重点,如图 2.136 所示.如果不考虑 $r<0$,则极点 O 不是二重点.

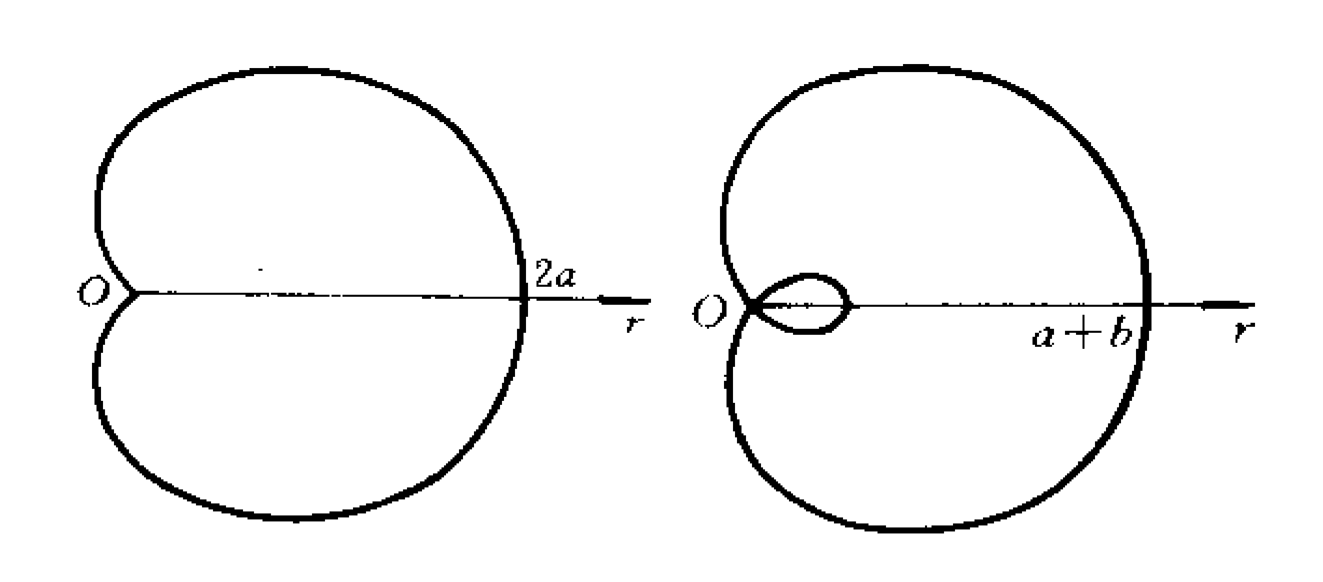


图 2.135　　　　图 2.136

1547. $r=a\sin 3\varphi\ (a>0)$.

解　由于 $r\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)=r(\varphi)$,故函数 r 是以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期的函数.

函数的存在域为:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \pi;\ \frac{4\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{3}.$$

为此，只要讨论 $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$ 即可.

$$r' = 3a\cos 3\varphi \begin{cases} > 0, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right), \\ < 0, \varphi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right). \end{cases}$$

故当 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 时 r 有极大值 $r = a$；当 $\varphi = 0$ 及 $\frac{\pi}{3}$ 时，r 有极小值 $r = 0$.

射线 $\varphi = \frac{\pi}{6}, \varphi = \frac{5\pi}{6}$ 及 $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ 为图形的三对称轴.

曲线在点 O 自交且为三重点，整个图形有三个形状相同的瓣. 如图 2.137 所示.

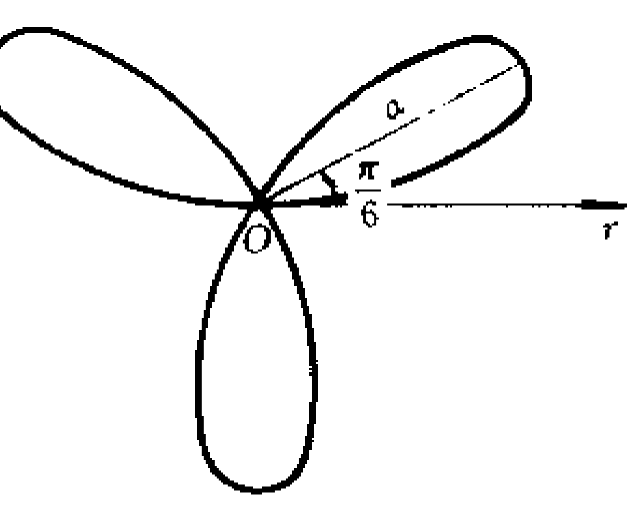


图 2.137

1548. $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}} (a > 0)$.

解 由于 $r\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = r(\varphi)$，故函数 r 是以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期的函数. 显然图形关于极轴对称.

函数的存在域为：

$$|\varphi| < \frac{\pi}{6} \text{ 及 } \frac{\pi}{2} < |\varphi| < \frac{5\pi}{6}.$$

解 由于

$$\lim_{\varphi\to1} r = \lim_{\varphi\to1}\frac{a\operatorname{th}\varphi}{\varphi-1} = +\infty,$$

$$\lim_{\varphi\to+\infty} r = \lim_{\varphi\to+\infty}\frac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi-1} = \lim_{\varphi\to+\infty}\frac{a}{\operatorname{ch}^2\varphi} = 0,$$

从而曲线以 $\varphi=1$ 为渐近线，以极点为渐近点．又

图 2.138

$$\frac{dr}{d\varphi} = a\cdot\frac{\frac{1}{\operatorname{ch}^2\varphi}(\varphi-1)-\operatorname{th}\varphi}{(\varphi-1)^2}$$

$$= a\cdot\frac{(\varphi-1)-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2\varphi}{(\varphi-1)^2\operatorname{ch}^2\varphi},$$

当 $1<\varphi<+\infty$ 时恒有 $(\varphi-1)-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2\varphi<0$. 事实上，令

$$y(\varphi)=(\varphi-1)-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2\varphi.$$

则 $y(1)=-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2<0$,而

$$y'(\varphi)=1-\operatorname{ch}2\varphi<0,$$

故有 $y(\varphi)\leqslant y(1)<0$. 这就证明了当 $1<\varphi<+\infty$ 时恒有 $\frac{dr}{d\varphi}<0$,即当 φ 增大时 r 单调减小．

为考察当 $r\to+\infty$ 时曲线的变化趋势，令

$$y_1 = x\mathrm{tg}1,\ y_2 = a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi-1}\sin\varphi.$$

由于

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi-1}\sin\varphi - x\mathrm{tg}1 \\ &= a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi-1}\sin\varphi - a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi-1}\cos\varphi\,\mathrm{tg}1 \\ &= a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi-1}\cos\varphi\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi-1}\cos\varphi\,\mathrm{tg}1 \\ &= a\mathrm{th}\varphi\cos\varphi\frac{\mathrm{tg}\varphi-\mathrm{tg}1}{\varphi-1}, \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{\varphi\to1}(y_2-y_1) = \lim_{\varphi\to1}a\mathrm{th}\varphi\cos\varphi\frac{\mathrm{tg}\varphi-\mathrm{tg}1}{\varphi-1}$$

$$= \frac{a\mathrm{th}1}{\cos1}.$$

于是，在直角坐标系下，当 $r\to+\infty$ 时，曲线 $r = a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi-1}$ 以直线

$$y = x\mathrm{tg}1 + a\frac{\mathrm{th}1}{\cos1}$$

为渐近线．

计算几点的坐标如下表：

φ	1.2	1.4	$\frac{\pi}{2}$	1.6	1.8	2	2.5	π	5	$\frac{3\pi}{2}$	2π	10	$\varphi\to+\infty$
r	4.15a	2.20a	1.59a	1.53a	1.17a	0.96a	0.65a	0.46a	0.24a	0.21a	0.18a	0.11a	$r\to0$

综上分析知，曲线是螺状线，如图 2.139 所示．

1550. $\cos\varphi = \frac{r-1}{r^2}$.

解 由方程容易判定，曲线关于极轴对称．因而只需在 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 范围内研究图形．方程可化为

$$r=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}.$$

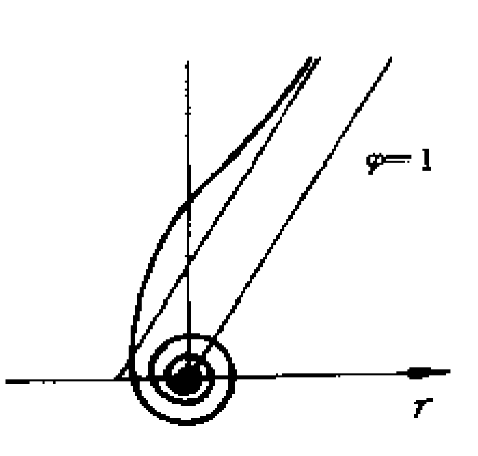


图 2.139

由于必有 $1-4\cos\varphi\geqslant 0$，故角 φ 的最小值应为

$$\varphi=\arccos\frac{1}{4}\approx 75°30',$$

对应的 $r=2$. 由 $r>0$ 知曲线方程为

$$r=\frac{1+\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}\left(\arccos\frac{1}{4}\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}\right);\quad(1)$$

$$r=\frac{1-\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}\quad(2)$$

首先研究方程(1)所表示的曲线的图形．因为随着 φ 增加，$2\cos\varphi$ 减小，$\sqrt{1-4\cos\varphi}$ 增大，因而 r 随 φ 增加而单调增加，事实上，易证 $\frac{dr}{d\varphi}>0$. 又

$$\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}-0}r=\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1+\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}=+\infty,$$

所以，当 $r\to+\infty$ 时有渐近线 $\varphi=\frac{\pi}{2}$. 又由 $\cos\varphi=\frac{r-1}{r^2}$，得

$$x=\frac{r-1}{r},$$

故当 $r\to+\infty$ 时 $x\to 1$，即当 $r\to+\infty$ 时，曲线与直线 $r=\frac{1}{\cos\varphi}$ 无限接近(直角坐标系下 $x=1$ 为渐近线).

再来研究拐点，由

$$\frac{d\cos\varphi}{dr}=\frac{r^2-2r(r-1)}{r^4}=\frac{2-r}{r^3},$$

$$-\sin\varphi\frac{d\varphi}{dr}=\frac{2-r}{r^3},$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{r^3}{r-2}\sin\varphi,$$

从而

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2}=\frac{3r^2(r-2)-r^3}{(r-2)^2}\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi+\frac{r^3}{r-2}\cos\varphi$$

$$=\frac{r^3(2r^3-6r^2)}{(r-2)^3}\sin^2\varphi+\frac{r^3}{r-2}\cos\varphi$$

$$=\frac{r^5(2r-6)}{(r-2)^3}\left[1-\frac{(r-1)^2}{r^4}\right]+\frac{r^3}{r-2}\cdot\frac{r-1}{r^2}$$

$$=\frac{r\{(2r-6)[r^4-(r-1)^2]+(r-2)^2(r-1)\}}{(r-2)^3}.$$

由 $r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}=0$ 得 $2r^4-3r^2+8r-6=0$，经判别知：拐点的 r 介于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 和 1 之间.

再来研究方程(2). 由于

$$\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}-0} r=\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1-\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}=1,$$

事实上，由 $\cos\varphi=\frac{r-1}{r^2}$ 也可得：当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，$r=1$. 因而点 $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 是曲线上的点. 又

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{1}{(2\cos\varphi)^2}\left[(1-4\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}}(-2\sin\varphi)\right.$$

$$\left.\cdot(2\cos\varphi)+2\sin\varphi(1-\sqrt{1-4\cos\varphi})\right]$$

$$=\frac{2\sin\varphi[(1-\sqrt{1-4\cos\varphi})\sqrt{1-4\cos\varphi}-2\cos\varphi]}{(2\cos\varphi)^2\sqrt{1-4\cos\varphi}}$$

$$=\frac{2\sin\varphi[\sqrt{1-4\cos\varphi}-(1-2\cos\varphi)]}{(2\cos\varphi)^2\sqrt{1-4\cos\varphi}}. \qquad (1)$$

容易证明：$f(\varphi)=\sqrt{1-4\cos\varphi}-(1-2\cos\varphi)<0$. 事实上，有

$$f'(\varphi)=2\sin\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{1-4\cos\varphi}}-1\right)<0 \quad 且 f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

又因当 $\varphi\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，(1) 的其它因子均为正，故得 $\frac{dr}{d\varphi}<0$，即 r 随 φ 的增加而单调下降，并且当 $\varphi=\pi$ 时达到极小值

$$r=\frac{1-\sqrt{5}}{-2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

事实上，$\frac{dr}{d\varphi}$ 经过 $\varphi=\pi$ 从负变到正.

计算几点的坐标列表如下：

φ	75°30′	76°5′	77°10′	81°	84°	87°	$\varphi\to\frac{\pi}{2}+0$	90°	105°	140°	155°	180°
r	2	2.5	3	5	8.85	19.7	$r\to+\infty$	1	0.81	0.66	0.63	0.62

曲线如图 2.140 所示.

作出下列曲线族的图表（a 表参变量）：

1551. $y=x^2-2x+a$.

解 将方程变形：

$$y-(a-1)=(x-1)^2.$$

作平移

$$\begin{cases} x = x' + 1, \\ y = y' + (a - 1), \end{cases}$$

即得标准方程

$$y' = x'^2,$$

此为向上凹的抛物线．

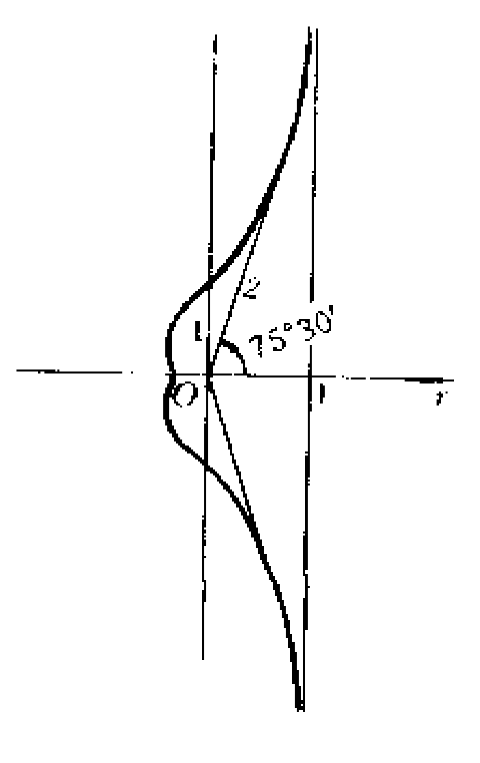
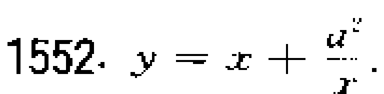


图 2.140

当 $a > 1$ 时，抛物线的顶点位于第一象限；当 $a < 1$ 时，抛物线的顶点位于第四象限；当 $a = 1$ 时，抛物线的顶点在(1，0)．不论 a 为何值，此抛物线族的顶点位于直线 $x = 1$ 上．如图 2.141 所示．



1552. $y = x + \dfrac{a^2}{x}$.

解　当 $a = 0$ 时为直线 $y = x$．当 $a \neq 0$ 时为双曲线族，其图形可由

$y = x$ 和 $y = \dfrac{a^2}{x}$ 相加而成，它们均以直线

$y = x$ 和 $x = 0$ 为渐近线．

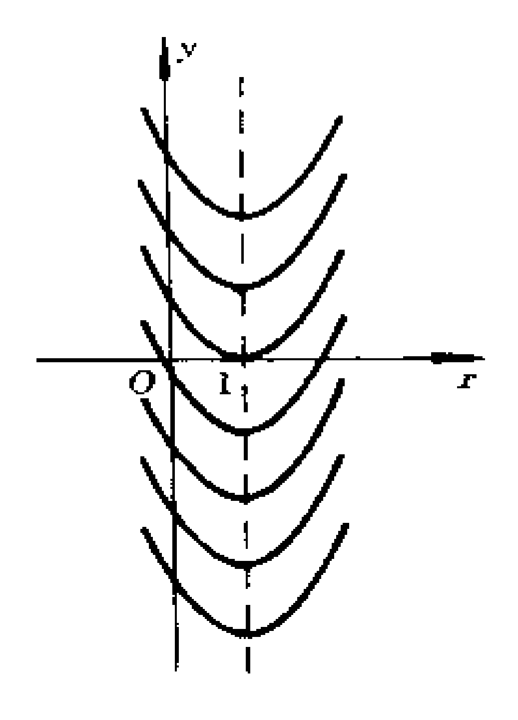


图 2.141

当 $x = |a|$ 时，有极小值 $y = 2|a|$；当 $x = -|a|$ $(a \neq 0)$ 时有极大值 $y = -2|a|$．如图 2.142 所示．

1553. $y = x \pm \sqrt{a(1-x^2)}$.

解 $y - x = \pm\sqrt{a(1-x^2)}$，即 $(y-x)^2 + ax^2 = a$.

作仿射变换

$$\begin{cases} \xi_1 = -x + y, \\ \xi_2 = x, \end{cases}$$

则原方程变形为

$$\xi_1^2 + a\xi_2^2 = a.$$

当 $0 < a < +\infty$ 时为椭圆族；当 $-\infty < a < 0$ 时为双曲线族；当 $a = 0$ 时为直线 $y = x$.



图 2.142

全族曲线均通过点$(-1, -1)$及$(1, 1)$.

$y' = 1 \mp \dfrac{ax}{\sqrt{a(1-x^2)}}$. 令 $y' = 0$，得

$$x^2 = \frac{1}{1+a},$$

则 $1 + a > 0$ 或 $a > -1$.

$$y'' = \mp \frac{a^2}{[a(1-x^2)]^{\frac{3}{2}}},$$

当 $y \geqslant x$ 时上式取负号；当 $y \leqslant x$ 时上式取正号.

于是，当 $y \geqslant x$ 时，有

(1) 若 $a > 0$，则当 $x = \dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时，由于 $y'' < 0$，故取得极大值 $y = \sqrt{1+a}$.

若 $-1<a<0$，则当 $x=-\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时也取得极大值 $y=-\sqrt{1+a}$.

当 $x=\mp 1$ 时取得边界极小值 $y=\mp 1(a\neq 0)$.

(2) 由于 $y''<0$，故曲线是凸的.

当 $y\leqslant x$ 时，有

(1) 若 $a>0$，当 $x=-\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时有极小值

$$y=-\sqrt{1+a}.$$

若 $-1<a<0$，当 $x=\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时有极小值

$$y=\sqrt{1+a}.$$

当 $x=\mp 1$ 时取得边界极大值 $y=\mp 1$.

(2) 由于 $y''>0$，故曲线是凹的.

此外，当 $a<0$ 时，曲线有渐近线，容易求得它们为 $y=(1\pm\sqrt{-a})x$.

椭圆族、双曲线族与直线已为大家所熟悉，故图略.

1554. $y=\frac{x}{2}+e^{-ax}$.

解 原方程可变形为

$$y-\frac{x}{2}=e^{-ax}.$$

因此，若作仿射变换

$$\begin{cases}\xi_1=-\frac{x}{2}+y,\\ \xi_2=x,\end{cases}$$

则原方程化成标准形式

$$\xi_1 = e^{-ax}2.$$

当 $a \neq 0$ 时，表示一指数曲线族；当 $a = 0$ 时，表示直线 $y = 1 + \frac{x}{2}$.

全族曲线均通过点(0,1).

$y' = \frac{1}{2} - ae^{-ax}$. 令 $y' = 0$ 得

$$x = \frac{1}{a}\ln 2a.$$

$y'' = a^2e^{-ax} > 0$，故曲线呈凹状.

若 $a > 0$，则当 $x = \frac{1}{a}\ln 2a$ 时有极小值

$$y = \frac{1}{2a}(1 + \ln 2a);$$

若 $a \leqslant 0$，则因 $y' > 0$，故函数 y 是增大的.

现求渐近线：当 $a > 0$ 时，

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{xe^{ax}}\right) = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \to +\infty}(y - kx) = 0,$$

故渐近线为 $y = \frac{x}{2}$.

同法求得当 $a < 0$ 时，渐近线也为 $y = \frac{x}{2}$，然此时应考虑 $x \to -\infty$.

如图 2.143 所示.

1555. $y = xe^{-\frac{x}{a}}$.

解 全族曲线均通过原点.

$y' = e^{-\frac{x}{a}}\left(1 - \frac{x}{a}\right)$. 令 $y' = 0$，得

$$x = a.$$

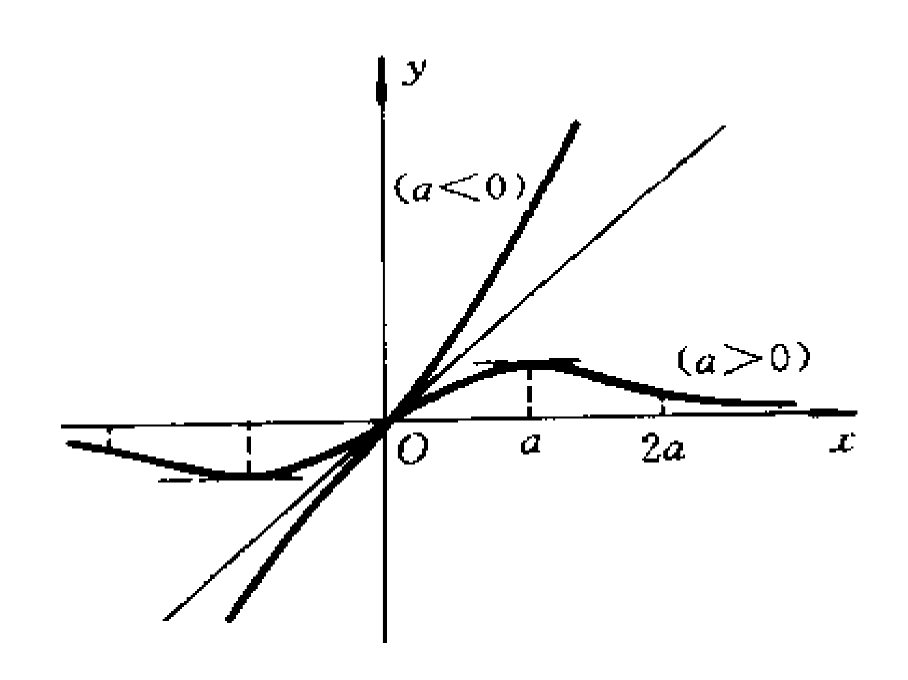


图 2.144

证　如果 x_0 为 $F(x)$ 的极大值点，则在 x_0 点附近有

$$F(x_0) > F(x) \ (x \neq x_0) \qquad (*)$$

即 $Cf^2(x_0) > Cf^2(x)$. 根据 $C > 0$，以及 $f(x)$ 不为负，必有

$$f(x_0) > f(x) \ (x \text{ 在 } x_0 \text{ 附近，且 } x \neq x_0)$$

这就证明了 x_0 点也为 $f(x)$ 的极大值点. 反之，若 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点，则在 x_0 附近，有

$$f(x_0) > f(x) \ (x \neq x_0).$$

于是，

$$Cf^2(x_0) > Cf^2(x),$$

即 $(*)$ 式成立. 这就证明了 x_0 点也为 $F(x)$ 的极大值点. 同样道理，若 x_0 为极小值点时，也可证明 $F(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的极小值点.

1557. 证明：若当 $-\infty < x < +\infty$ 时，函数 $\varphi(x)$ 单调增加，

则函数

$$f(x) \text{ 与 } \varphi(f(x))$$

有相同的极值点.

证 设 x_0 点为 $f(x)$ 的极值点，例如是极大值点，则在 x_0 点附近有

$$f(x_0) > f(x) \quad (x \neq x_0). \tag{1}$$

因为函数 $\varphi(x)$ 为单调增加的，故也有

$$\varphi(f(x_0)) > \varphi(f(x)) \quad (x \neq x_0). \tag{2}$$

这就证明了 x_0 点也是 $\varphi(f(x))$ 的极大值点. 反之也对，因为由(2)，从 $\varphi(x)$ 的单调增加性质知必有(1). 另一种情形，即设 x_0 点是极小值点时，也可类似获证. 于是，原命题得证.

1558. 二正数的和等于常数 a，求此二正数的 m 次幂与 n 次幂 $(m > 0, n > 0)$ 相乘积的极大值.

解 设一正数为 x，则按题设，我们须求函数

$f(x) = x^m(a-x)^n (0 < x < a)$ 的极大值. 由于 $f'(x) = x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma-(m+n)x]$，故若令 $f'(x) = 0$，即得 $x = \dfrac{ma}{m+n}$. 当 $0 < x < \dfrac{ma}{m+n}$ 时，$f'(x) > 0$；当 $a > x > \dfrac{ma}{m+n}$ 时 $f'(x) < 0$. 因此，当 $x = \dfrac{ma}{m+n}$ 时，$f(x)$ 有极大值

$$f\left(\frac{ma}{m+n}\right) = \frac{a^{m+n}m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

1559. 二正数的乘积等于常数 a，求此二数的 m 次幂与 n 次幂 $(m > 0, n > 0)$ 之和的极小值.

解　设一正数为 x，则按题设，我们须求函数

$$f(x)=x^m+\left(\frac{a}{x}\right)^n(0<x<+\infty)$$

的极小值．

由于

$$f'(x)=\frac{mx^{m+n}-na^n}{x^{n+1}}.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}$. 显然，在此点的左边，$f'(x)<0$，而在此点的右边，有 $f'(x)>0$，故知当 $x=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}$ 时，函数 $f(x)$ 有极小值

$$f\left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}\right]=(m+n)\left(\frac{a^{mn}}{m^mn^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}.$$

1560. 取怎样的数为对数之底时有一个数，它本身和它的对数相等？

解　解法一：

设所求之数为 a，则对于 $0<a<1,1<a<+\infty$ 及 $x>0$ 时

$$\log_a x=x$$

或

$$a^x=x. \tag{1}$$

问题即为 a 取怎样的数，上式才成立．

为研究使(1)式成立的 a 及相应的 x 的取值情况．我们在直角坐标系内取曲线

$$\begin{cases}y=a^x,\\ y=x.\end{cases} \tag{2}$$

在交点处，方程(1)与(2)等价(图2.145)

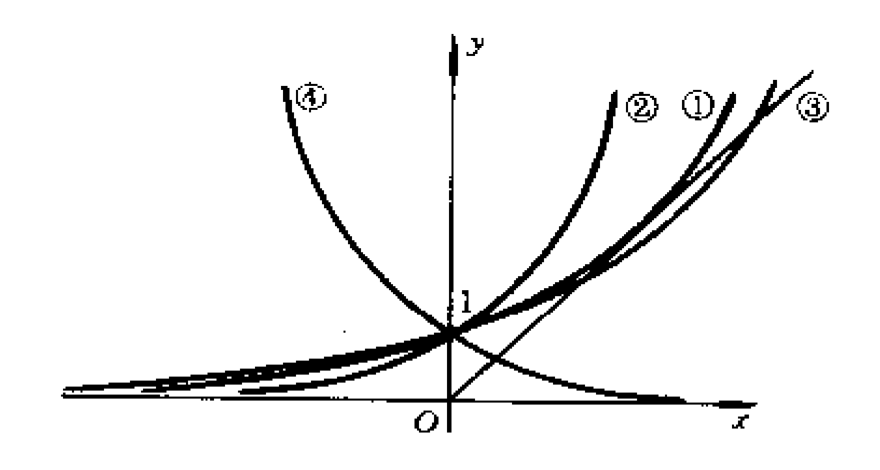


图2.145

注意，指数曲线 $y=a^x$ 与直线 $y=x$ 是否有公共点，就看其差

$$\Delta=f(x)=a^x-x$$

有无使 $\Delta=f(x)=0$ 的点 x.

设 $y=a_0^x$ 与 $y=x$ 相切于一点 $(x_0,a_0^{x_0})$，此时

$f'(x_0)=0$,

即有

$$a_0^{x_0}\ln a_0-1=0. \tag{3}$$

从 $\Delta=0$ 知有(1)，即

$$a_0^{x_0}-x_0=0. \tag{4}$$

由(3)和(4)可解得

$$a_0=e^{\frac{1}{e}},x_0=e. \tag{5}$$

当 $a>a_0$ 时，易见 $y=a^x$ 比 $y=a_0^x$ 远离直线 $y=x$. 故此时无交点. 实际上，注意到有 $a_0^x\geqslant x$，并记 $g(a,x)=a^x$，对于 $x\geqslant 0$，只要 $a>a_0$ 就有 $a^x>a_0^x\geqslant x$，也即 $g(a_0,x)$ 是 $g(a,x)$ 的极小值. 故当 $a>a_0$ 时，$y=a$ 与 $y=$

x 无交点．而当 $0<a\leqslant a_0$ 时(且要求 $a\neq 1$)，此时(2)有解，从而(1)有解．如图 2.145 中曲线①、②、③、④所示．

解法二：

设 $f(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}$，则由 $f'(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$ 得 $x=e$. 显然当 x 通过 e 时 $f'(x)$ 由正变负，故知 $f(e)=e^{\frac{1}{e}}\approx 1.445$ 为极大值．从而 $0<x^{\frac{1}{x}}\leqslant e^{\frac{1}{e}}$.

因此，当 $0<a\leqslant e^{\frac{1}{e}}$ 且 $a\neq 1$ 时，有 $\log_a x=x$.

1561．从面积为 S 的一切矩形中，求其周界为最小者．

解　设矩形的一边长为 x，则另一边长为 $\dfrac{S}{x}$，周界长为

$$f(x)=2\left(x+\frac{S}{x}\right),$$

按题设，我们须求其最小值．

由于 $f'(x)=2\left(1-\dfrac{S}{x^2}\right)$，故令 $f'(x)=0$，即得 $x=\sqrt{S}$. 由 $f''(\sqrt{S})>0$ 知此时 $f(x)$ 有极小值．又由于极值的唯一性，故此也为最小值．因此，所求的矩形为以 $\sqrt{S}$ 为边的正方形．

1562．若直角三角形的一直角边与斜边之和为常数，求有最大面积的直角三角形．

解　设一直角边为 x，则按题设，另一直角边为 $\sqrt{(a-x)^2-x^2}=\sqrt{a^2-2ax}$，故直角三角形的面积为

$$S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-2ax}.$$

利用极值的解法得：当 $x=\dfrac{a}{3}$ 时，$S(x)$ 值为极大值．又

由于极值的唯一性，故知当 $x = \frac{a}{3}$ 时，$S(x)$ 取最大值．此时斜边为 $a - x = a - \frac{a}{3} = \frac{2}{3}a$，它为直角边的两倍，故此三角形的两锐角分别为 $30°$ 及 $60°$．

本题也可用 1556 题结论求得结果．事实上，令 $F(x) = 4S^2(x)$，则 $F(x)$ 与 $S(x)$ 有相同的极值点，对 $F(x)$ 求极值可得同样的结果．

1563．当有怎样的长度大小时，容积为 V 的圆柱形闭合罐子有最小的表面积？

解　设底半径为 x，则高为 $H = \frac{V}{\pi x^2}$，故圆柱的表面积为

$$S(x) = 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2} + 2\pi x^2.$$

由于，

$$S'(x) = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2},$$

令 $S'(x) = 0$ 得 $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$．由 $S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) > 0$ 知，当 $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时，$S(x)$ 有极小值

$$s\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = \sqrt[3]{54\pi V^2}.$$

由于只有一个极值，故知当底半径为 $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，而高为 $\frac{V}{\pi x^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时有最小面积 $\sqrt[3]{54\pi V^2}$．

1564. 在不超过半圆的已知弓形内嵌入有最大面积的矩形.

解 由图 2.146 知,不妨设圆的半径为单位长度,则

$$OA = \cos\varphi$$

$$BC = \sin\alpha,$$

$$BA = \cos\alpha - \cos\varphi.$$

从而矩形面积为

$$S(\alpha) = 2BC \cdot BA$$

$$= 2\sin\alpha(\cos\alpha - \cos\varphi)$$

$$= \sin 2\alpha - 2\sin\alpha\cos\varphi.$$

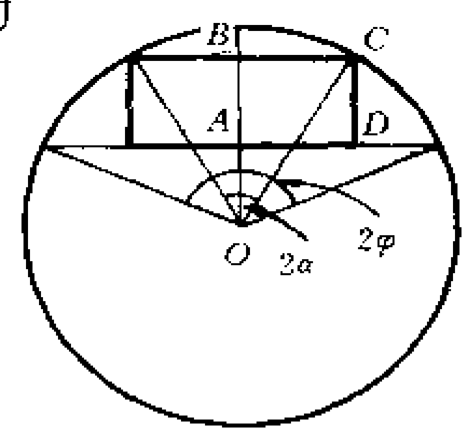


图 2.146

而

$S'(\alpha) = 2\cos 2\alpha - 2\cos\alpha\cos\varphi = 4\cos^2\alpha - 2\cos\alpha \cdot \cos\varphi - 2$,令 $S'(\alpha) = 0$,可得

$$\cos\alpha = \frac{\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi + 8}}{4}.$$

注意到 $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$,故 $\cos\varphi \leqslant \cos\alpha$,于是有

$$S''(\alpha) = -4\sin 2\alpha + 2\cos\varphi\sin\alpha \leqslant -4\sin 2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha = -3\sin 2\alpha < 0.$$

这就说明

$$\alpha = \arccos\frac{\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi + 8}}{4}$$

是使 $S(\alpha)$ 达到极大值的点,也就是说此时弓形内所对应的矩形面积最大.

1565. 在椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

中，嵌入有最大面积而边平行于椭圆轴的矩形．

解 如图 2.147 所示．

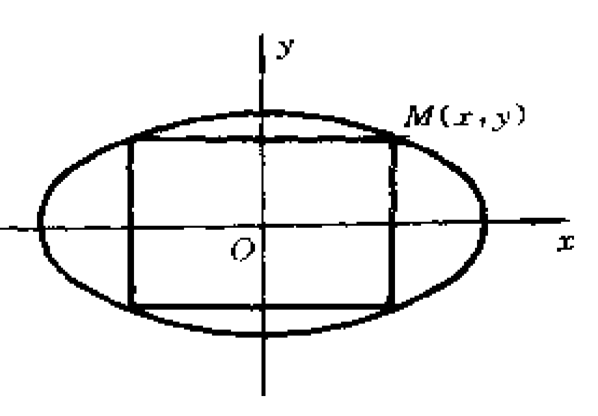


图 2.147

由于点 $M(x,y)$ 在椭圆上，故适合方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$．解之，得 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$．

于是按题设，求函数

$$f(x)=4x\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

当 x 为何值时最大，记 $C=\frac{a^2}{16b^2}$，利用 1556 题的结果，$f(x)$ 与 $F(x)=Cf^2(x)=x^2(a^2-x^2)$ 有相同的极值，但 $F'(x)=4x\left(\frac{a^2}{2}-x^2\right)$，令 $F'(x)=0$，则 $x=0$（不适合），$x=\frac{a}{\sqrt{2}}$．当 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 时，有 $F''\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=-4a^2<0$，故 $f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=2ab$ 为最大面积．此时矩形的边为 $a\sqrt{2}$ 和 $b\sqrt{2}$．

1566. 在底边为 b 及高为 h 的三角形中，嵌入有最大周长的矩形，研究此问题有解的可能性．

解 如图 2.148 所示．

$AB=b, CD=h$．由于 $\frac{x}{b}=\frac{h-y}{h}$，故 $x=\frac{b}{h}(h-y)$．

矩形的周长为

$$p=2\left[y+\frac{b}{h}(h-y)\right]=2\left[\left(1-\frac{b}{h}\right)y+b\right].$$

显见，当 $h=b$ 时，周长 $p=2b$ 为一定值；当 $h>b$ 时，$p'_y>0$，p 单调增加，故当 $y=h$ 时有边界的极大值 $p=2h$；当 $h<b$ 时，$p'_y<0$，p 单调减少，理论上当 $y=0$ 时有边界的极大值 $2b$. 但嵌入的矩形不允许边长为0，故当 $h<b$ 时嵌入的矩形有最大周长者是不存在的，即此时问题无解.

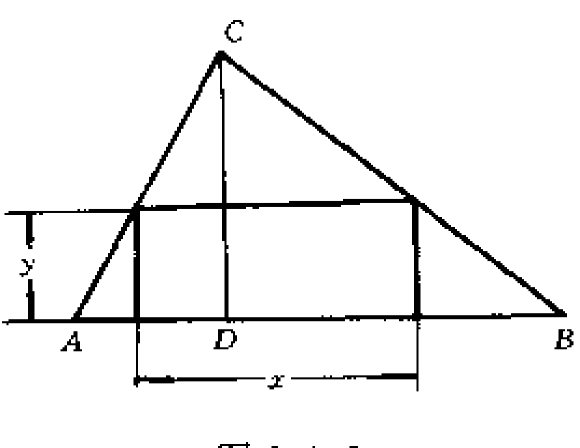


图 2.148

1567. 从直径为 d 的圆形树干切出横断面为矩形的梁，此矩形的底等于 b，高等于 h. 若梁的强度与 bh^2 成比例，问梁的尺寸为如何时，其强度最大？

解　由于 $b^2+h^2=d^2$，故 $h^2=d^2-b^2$，从而考虑函数

$$f(b)=b(d^2-b^2)$$

何时取最大值.

由于 $f'(b)=d^2-3b^2$，令 $f'(b)=0$ 得 $b=\dfrac{d}{\sqrt{3}}$.

此时 $h=d\sqrt{\dfrac{2}{3}}$，$f''(b)=-6b<0$，$f(b)$ 的值最大. 因此，所求的矩形的底为 $\dfrac{d}{\sqrt{3}}$，高为 $d\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

1568. 于半径为 R 的半球中，嵌入有最大体积的底为正方形的直角平行六面体.

解　设底边之一半为 x，则按题设，有

$$2x^2+y^2=R^2,$$

解 如图 2.149,圆柱的表面积为

$$S=2\pi(R\cos\varphi)^2+4\pi(R\cos\varphi)\cdot(R\sin\varphi)$$
$$=\pi R^2(1+\cos2\varphi)+2\pi R^2\sin2\varphi.$$

由$\dfrac{dS}{d\varphi}=0$得 $\mathrm{tg}2\varphi=2$. 记其解为

$\varphi_0=\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}^{-1}2,\varphi_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 于是

$\sin2\varphi_0=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\cos2\varphi_0=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. 又

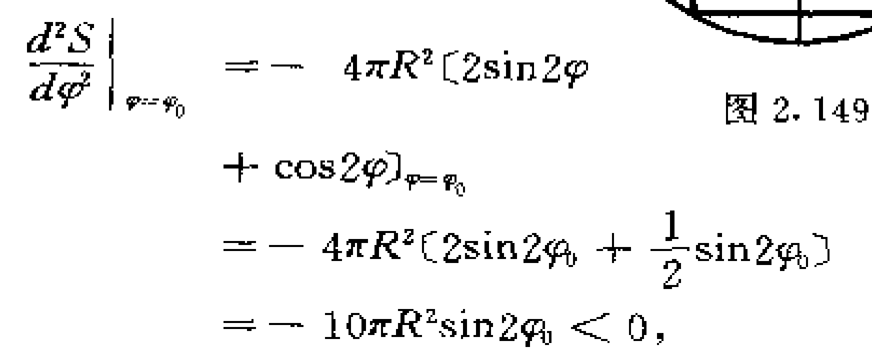


图 2.149

由于

$$\left.\frac{d^2S}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_0}=-4\pi R^2[2\sin2\varphi+\cos2\varphi]_{\varphi=\varphi_0}$$
$$=-4\pi R^2[2\sin2\varphi_0+\frac{1}{2}\sin2\varphi_0]$$
$$=-10\pi R^2\sin2\varphi_0<0,$$

故此时表面积最大,且最大表面积为

$$S=\pi R^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+2\pi R^2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$=\pi R^2(1+\sqrt{5})$$
$$\approx0.81\times4\pi R^2.$$

从而,球内嵌入圆柱的最大表面积约为球面面积的81%.

1571. 对于已知球作具有最小体积的外切圆锥.

解 设外切圆锥的底半径为x,高为h,球的半径为R,则可求得$h=\dfrac{2Rx^2}{x^2-R^2}$,于是,外切圆锥的体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2\cdot\frac{2Rx^2}{x^2-R^2}=\frac{2}{3}\pi R\cdot\frac{x^4}{x^2-R^2}(x>0).$$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572．求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$．按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$．经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$．

1573．于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高（图 2.150）．按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高（图 2.150）. 按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572．求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解　设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$．按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$．经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$．

1573．于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解　设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高(图2.150)．按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572．求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$．按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$．经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$．

1573．于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高（图 2.150）．按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572．求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2 - r^2}$．按题设，只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$，令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$．经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$．

1573．于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高（图 2.150）．按题设，只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H} = \frac{R - r}{R}$，故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572．求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$．按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$．经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$．

1573．于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高(图 2.150)．按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572．求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解　设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$．按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$．经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$．

1573．于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解　设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高(图 2.150)．按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572．求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$．按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$．经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$．

1573．于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高（图2.150）．按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572．求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$．按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$．经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$．

1573．于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高(图 2.150)．按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572．求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解　设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$．按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$．经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$．

1573．于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解　设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高（图 2.150）．按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572．求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解　设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2 - r^2}$．按题设，只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$，令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$．经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$．

1573．于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解　设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高（图 2.150）．按题设，只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H} = \frac{R - r}{R}$，故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572．求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$．按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$．经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$．

1573．于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高(图 2．150)．按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设，只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$，令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设，只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H} = \frac{R - r}{R}$，故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572．求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$．按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$．经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$．

1573．于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高（图 2.150）．按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572．求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$．按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$．经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$．

1573．于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高（图 2.150）．按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572．求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$．按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$．经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$．

1573．于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高（图 2.150）．按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572．求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解　设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$．按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$．经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$．

1573．于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解　设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高（图 2.150）．按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572．求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573．于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高(图2.150)．按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设，只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$，令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设，只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H} = \frac{R - r}{R}$，故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572．求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$．按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$．经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$．

1573．于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高（图2.150）．按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572．求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解　设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$．按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$．经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$．

1573．于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解　设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高（图 2.150）．按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经检验知此时体积最小，且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍．

1572．求母线为 l 的圆锥之最大体积．

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值．

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573．于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱．

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高，H 为圆锥的高（图 2.150）．按题设，只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值．由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$，即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$，故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$